Изоспин в физике атомного ядра и элементарных частиц

Учебное пособие

20 марта 2024 г.

Аннотация

Учебное пособие «Изоспин в физике атомного ядра и элементарных частиц» объединяет основные сведения, относящиеся к понятию изотопического спина, учебных дисциплин (курсов лекций) «Физика атомного ядра», «Ядерные реакции», «Физика элементарных частиц» и предназначено для аспирантов, осваивающих образовательную программу высшего образования по научной специальности 1.3.15. «Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий» в аспирантуре НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ. Пособие также может быть полезно студентам и аспирантам, изучающим физику ядра и частиц и(или) обучающимся по смежным научным специальностям.

Оглавление

1 Феноменологическое описание изоспина **4**
1.1 Изотопические мультиплеты частиц 4
1.2 Природа изоспина 8

2 Ядерный изоспин **10**
2.1 Изоспин и структура ядра 10
2.2 Правила отбора по изоспину для распадов ядер 13
2.3 Правила отбора по изоспину для ядерных реакций 14

3 Изоспин и лагранжианы **18**
3.1 Функция Лагранжа 18
3.2 Лагранжиан нуклон-нуклонного взаимодействия 20
3.3 Лагранжиан квантовой хромодинамики 25
3.4 $SU(2)$-симметрия по изоспину для кварков 26
3.5 $SU(2)$-симметрия по изоспину для антикварков 27
3.6 Сохранение изоспина и его проекции в сильных взаимодействиях 30
3.7 $SU(2)$-инвариантность и теорема Нётер 31

4 Сложение квантово-механических векторов **33**
4.1 Угловой момент 33
4.2 Использование таблиц Particle Data Group 34

5 $SU(3)$-симметрия **37**
5.1 Матрицы Гелл-Манна и гиперзаряд 37
5.2 Октеты легких мезонов 40
5.3 U- и V-спины 43

6 Другое использование термина «изоспин» **45**
6.1 Цветовой изоспин 45
6.2 Слабый изоспин 49

7 Примеры решения задач **52**

8 Заключительные замечания **58**

1 Феноменологическое описание изоспина

1.1 Изотопические мультиплеты частиц

Первые представления об *изотопическом спине* частиц появились вскоре после открытия Джеймсом Чедвиком в 1932 году нейтрона (n) — нейтральной частицы, близкой по массе к протону (p). Стало ясно, что, если исключить из рассмотрения электрический заряд ($Q_p = +1$ и $Q_n = 0$), эти, как тогда считалось, истинно элементарные частицы очень похожи по своим свойствам. Действительно, спины обеих частиц равны ($S_p = S_n = 1/2$), барионное число одинаково ($B_p = B_n = 1$), массы отличаются всего на 0.1%, нейтрон и протон одинаково участвуют в *сильных взаимодействиях*. Оказалось, что сильное взаимодействие является зарядово-независимым, то есть оно не различает протоны и нейтроны (инвариантно относительно замены $p \leftrightarrow n$). Сразу после открытия нейтрона немецкий физик-теоретик Вернер Гейзенберг предложил рассматривать протон и нейтрон как два различных состояния одной частицы — *нуклона*. Гипотеза о том, что сильному взаимодействию присуща особая симметрия, получившая в дальнейшем название *изотопической инвариантности*, была высказана в 1936 году американскими физиками Бенедиктом Кассеном и Эдвардом Кондоном. Протон и нейтрон образуют *изотопический дублет* и представляют собой простейший случай *изотопического мультиплета*.

Следует оговориться, что термин *изотопический спин* нельзя назвать удачным. Изотопами называют ядра с одинаковым зарядом, но с разным массовым числом, то есть ядра, содержащие разное число нейтронов. Если рассматривать протон и нейтрон как легкие ядра, то это легчайшие ядра-изобары. *Изобарами* называют ядра с одинаковым массовым числом, но разными зарядами. В прошлом делались попытки заменить понятие *изотопический спин* на *изобарический*, но нововведение не прижилось. Чтобы избежать неудачной аналогии с изотопами, изотопический спин называют просто *изоспином*.

В конце 40-х и в 50-х годах XX века было открыто большое количество *адронов* — сильновзаимодействующих субатомных частиц. Оказалось, что идея их группировки в изотопические мультиплеты весьма плодотворна. Адроны с одинаковыми относительно сильного взаимодействия свойствами (одина-

ковый спин, четность, барионное число, странность, очарование, прелесть и почти одинаковая масса) могут рассматриваться как различные зарядовые состояния одной и той же частицы.

Основной характеристикой изотопического мультиплета частиц является *вектор изоспина* ($\vec{T}$), различные проекции которого в трехмерном изоспиновом пространстве (или изотопическом, то есть в пространстве изотопического заряда) отвечают различным зарядовым состояниям мультиплета, то есть отдельным частицам. Сильное взаимодействие одинаково для всех членов мультиплета и не меняется при поворотах в изотопическом пространстве. Поэтому все состояния имеют одинаковую энергию, то есть являются *вырожденными*.

Из квантовой механики известно, что вырождение состояний всегда связано с тем или иным свойством инвариантности, а сама инвариантность связана с законом сохранения, и в этом случае появляется новое сохраняющееся квантовое число — *изоспин*. Наличие выделенного направления в изоспиновом пространстве следует из того факта, что члены одного изоспинового мультиплета отличаются друг от друга величиной *электрического заряда* Q. Электрический заряд, *проекция изоспина* (T_3), *барионное число*, или *барионный заряд* (B), *странность* (S), *очарование* (C), *прелесть* (B) и *квантовое число t-кварка* (T)[1] связаны *соотношением Гелл-Манна – Нишиджимы*

$$Q = T_3 + (B + \mathsf{S} + \mathsf{C} + \mathsf{B} + \mathsf{T})/2. \tag{1.1}$$

Квантовые числа для кварков приведены в табл. 1.1. Заметим, что знак значения квантовых чисел T_3, S, C, B и T, определяющих *аромат кварка*, совпадает со знаком его электрического заряда.

Барионный заряд кварков равен $+\frac{1}{3}$, а антикварков $-\frac{1}{3}$, поэтому *мезонные состояния* — обычные мезоны ($q\bar{q}$) и тетракварки ($qq\bar{q}\bar{q}$) — несут нулевой барионный заряд. *Барионы* — трехкварковые (qqq), а также пентакварковые ($qqqq\bar{q}$) состояния — обладают единичным барионным зарядом, а соответствующие *антибарионы* несут $B = -1$.

Гиперзаряд (Y) определяется по формуле

$$Y = B + \mathsf{S} - (\mathsf{C} - \mathsf{B} + \mathsf{T})/3. \tag{1.2}$$

Для u- и d-кварков он равен $+\frac{1}{3}$, для s равен $-\frac{2}{3}$ и равен нулю для c, b и t. Гиперзаряд, а также все квантовые числа, входящие в формулу Гелл-Манна – Нишиджимы (выражение (1.1)), являются *аддитивными квантовыми числами*.

[1] На момент открытия выражения (1.1) о существовании квантовых чисел, соответствующих тяжелым кваркам c, b и t, известно не было, и формула записывалась как $Q = T_3 + Y/2$.

Таблица 1.1: Квантовые числа кварков

Квантовое число	Обозначение	d	u	s	c	b	t
Заряд	Q	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
Изоспин	T	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
Проекция изоспина	T_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
Странность	S	0	0	-1	0	0	0
Очарование	C	0	0	0	$+1$	0	0
Прелесть	B	0	0	0	0	-1	0
Квантовое число t-кварка	T	0	0	0	0	0	$+1$

Изоспин (T) может быть равен нулю или принимать положительные целые и полуцелые значения. Значение этого квантового числа определяет число частиц в мультиплете.

- У частиц с $T = 0$ нет изотопических партнеров. Примерами *изосинглетных состояний* могут быть ω-мезоны, Λ- и Ω-гипероны.

- Изодублеты формируются из частиц с изотопическим спином 1/2. Помимо уже упомянутых выше протона и нейтрона, изодублеты формируют каоны, как псевдоскалярные, так и векторные. Другим примером является изодублет каскадных гиперонов Ξ^0 и Ξ^-. Частицы в изодублете различаются проекцией изотопического спина на какую-либо выделенную ось, например $T_3(p) = +1/2$ и $T_3(n) = -1/2$. Выбор знака проекции изоспина для протонов и нейтронов формален. Приведенные значения T_3 характерны для книг по физике элементарных частиц. В физике атомного ядра часто используют альтернативный выбор знаков T_3 для членов изодублета нуклонов. Это делается для того, чтобы большинство ядер имело положительную проекцию изоспина.

- Частицы с $T = 1$ формируют *изотриплеты*. Например, (π^-, π^0, π^+) или (Σ^-, Σ^0, Σ^+). Частицам изотриплета соответствуют значения проекции изоспина $(-1, 0, 1)$.

- Семейство Δ-резонансов формирует *изоквадруплет* с $T = 3/2$. При этом $T_3(\Delta^-) = -3/2$, $T_3(\Delta^0) = -1/2$, $T_3(\Delta^+) = 1/2$ и $T_3(\Delta^{++}) = +3/2$.

- Более высокие значения изотопического спина могут встречаться у атомных ядер. Подробнее о ядерном изоспине можно узнать в главе 2.

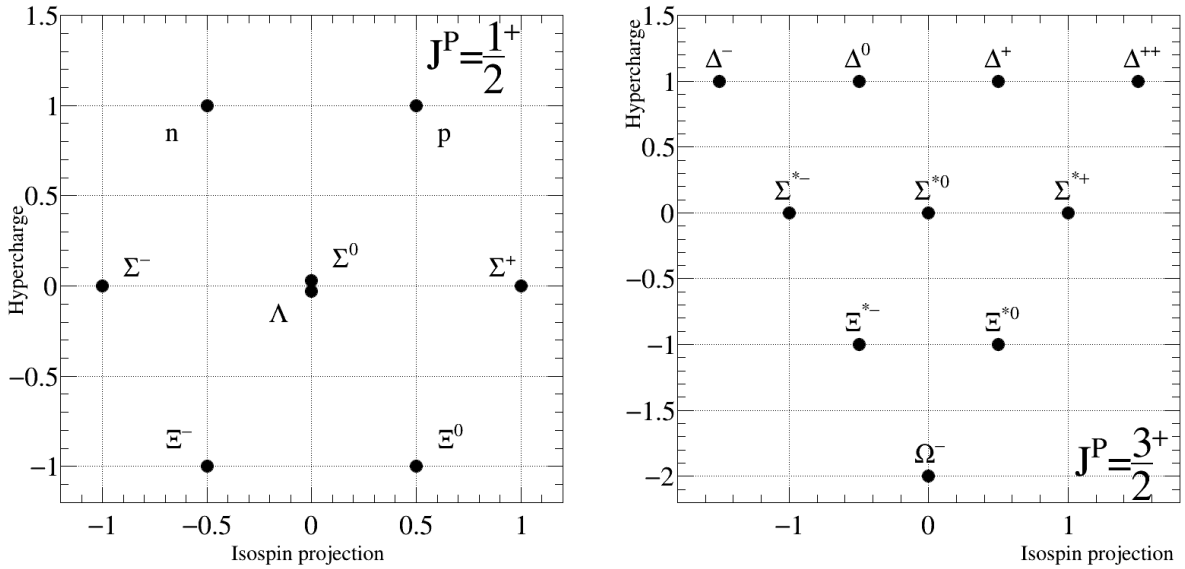

Рис. 1.1: Октет и декуплет барионов. По горизонтальной оси отложена проекция изоспина барионного состояния, а по вертикальной — его гиперзаряд

Примеры мультипетов по изоспину (для барионов) приведены на рис. 1.1, на котором изображена классификация частиц этого типа на основе более общей $SU(3)$-симметрии. Барионы формируют изомультиплеты с одинаковым гиперзарядом, но различными проекциями изоспина[2].

Как легко заметить, число проекций изоспина на выделенную ось вычисляется по формуле $2T + 1$. Важно отметить, что изотопический спин — формальная квантово-механическая характеристика, определенная во вспомогательном (формальном) гильбертовом пространстве. Операция над векторами $\vec{T}$ проводится так же, как и над обычными квантово-механическими векторами. Подробнее о сложении квантово-механических векторов можно узнать в главе 4.

Важную роль в физике частиц играют **законы сохранения изоспина и его проекции**:

- изотопический спин сохраняется только в сильных взаимодействиях;

[2] Для октета барионов со спином 1/2 нулевому гиперзаряду соответствуют изотриплет $(\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+)$ и изосинглет (Λ).

- в электромагнитных взаимодействиях сохраняется проекция изоспина.

1.2 Природа изоспина

Как будет показано в главе 3, природа изотопического спина лежит в слабой зависимости лагранжиана квантовой хромодинамики (КХД, QCD) от массы u- и d-кварков. В пределе $m_u = m_d$ структура этого лагранжиана (L_{QCD}) позволяет составить спинор, который будет инвариантен относительно вращения в некотором гильбертовом пространстве размерности 2. Будет показано, что группой симметрии для этого спинора является группа $SU(2)$.

Взаимодействие между кварками происходит за счет обмена глюонами. При этом тип (*аромат*) кварка не влияет на сильное взаимодействие, которое определяется лишь цветовыми зарядами КХД. Имеет место следующая иерархия масс кварков:

$$m_u \approx m_d \ll m_s \ll m_c \ll m_b \ll m_t. \tag{1.3}$$

Важно отметить, что соотношение (1.3) выписано для так называемых *токовых масс*, входящих в лагранжиан КХД. При этом, согласно экспериментальным данным, имеется следующие соотношение: $m_u/m_d = 0.47^{+0.06}_{-0.07}$, то есть u-кварк почти в два раза легче d-кварка, а условием полной изоспиновой симметрии является равенство их масс. Причина, по которой симметрия по изоспину проявляется столь явно, заключается в том, что сила ее нарушения зависит не от разности их масс, а от обезразмеренного выражения $(m_u - m_d)/\mu$, где μ — некоторый параметр, отвечающий за энергетический масштаб процесса. В качестве μ могут выступать: масштабный параметр КХД ($\Lambda_{\mathrm{QCD}} \approx 200\,$МэВ), масса конституэнтного кварка (порядка $300\,$МэВ), масса нуклона. При таких выборах μ нарушение изотопической инвариантности меньше 1%, поэтому, как это ни странно, изотопический спин является, пожалуй, мощнейшим феноменологическим инструментом непертурбативной КХД. В то же время расчеты, проведенные другими методами, едва достигают точности 15–20%. Лишь в уникальных случаях (например, для распадов типа $B_s \to \mu^+\mu^-$) погрешность теоретических предсказаний дотягивает до 5%. При этом выводы, сделанные исходя из принципов изотопической симметрии, точны на уровне порядка процента!

Изотопическая инвариантность обладает большой предсказательной силой. Так, на ее основе в свое время были предсказаны новые частицы, их массы, заряды. Из характеристик заряженных пионов был предсказан π^0-мезон, по известным характеристикам Σ^+ и Σ^0 был предсказан Σ^--гиперон.

Примером, который (скорее всего) реализуется в ближайшее время, являются частицы с двойным очарованием. В 2016 году эксперимент LHCb, ко-

торый проводится на Большом адронном коллайдере, объявил об открытии частицы Ξ_{cc}^{++}, в состав которой входят сразу два c-кварка и один u-кварк. В 2017 году открытие было подтверждено регистрацией еще одного канала распада Ξ_{cc}^{++}, а также было измерено время жизни этой частицы. Теперь основной фокус сместился на поиск ее изотопического партнера — бариона Ξ_{cc}^{+}, кварковый состав которого ccd. Если до открытия Ξ_{cc}^{++} диапазон поисков достигал величины порядка 1 ГэВ, то сейчас он сузился до нескольких МэВ.

Следует отметить, что термин *изоспин* используется везде, где в том или ином виде фигурирует группа симметрии $SU(2)$. Например, при рассмотрении цветовых степеней свободы КХД или в теории электрослабого взаимодействия. Мы коснемся этих понятий в главе 6. Однако уже сейчас следует особо подчеркнуть различие понятий *сильный изоспин*, *цветовой изоспин* и *слабый изоспин*. Первое — специальное квантовые число адронов, определяемое их кварковым составом. В каком-то смысле это симметрия случайная, обусловленная малыми массами кварков первого поколения. Второе понятие есть цветовая характеристика кварка. Цветовой изоспин — одно из двух аддитивных квантовых чисел, определяющих выделенные (выбранные) направления в цветовом пространстве. Третье понятие (слабый изоспин) вводится в теорию электрослабых взаимодействий для того, чтобы обозначить различие между состояниями с правой и левой *киральностью* и описать процессы, протекающие с изменением *аромата* (*флейвора*), то есть взаимодействия *заряженных токов*.

2 Ядерный изоспин

2.1 Изоспин и структура ядра

Изотопический спин является одной из характеристик атомного ядра. Вектор изоспина равен квантово-механической сумме изоспинов нуклонов, формирующих атомное ядро:

$$\vec{T} = \sum_{n=1}^{A} \vec{T}_n = \sum_{n=1}^{A} \frac{\vec{1}}{2}, \tag{2.1}$$

где A — массовое число ядра. Проекция изоспина ядра зависит от числа протонов (Z) и числа нейтронов (N) в нем и определяется выражением

$$T_3 = \frac{Z - N}{2}. \tag{2.2}$$

Отметим, что выбор знака в выражении (2.2) является соглашением. Часто в ядерно-физической литературе проекция изоспина определяется как $(N - Z)/2$, чтобы эта величина была положительной для большинства ядер. T_3 не зависит от того, находится ли ядро в основном или в возбужденном состоянии. Это квантовое число не меняется при электромагнитных переходах. В основном состоянии ядро имеет наименьший из возможных изоспинов:

$$T = |T_3| = \left|\frac{Z - N}{2}\right|. \tag{2.3}$$

При этом возбужденные состояния ядер могут иметь более высокие значения изоспина. Более того, не наблюдается упорядочение по изоспину. Так, например, для ядра ^{14}N основное состояние имеет изоспин, равный нулю, первое возбужденное характеризуется $T = 1$, а следующие — снова $T = 0$. Соответствующая схема уровней будет приведена далее в этой главе.

Максимально возможное значение изоспина получается для состояния, в котором у ядра все изотопические спины нуклонов параллельны:

$$T^{\max} = (Z + N)/2 = A/2.$$

Исследование ядерных уровней с точки зрения изотопической инвариантности позволяет получить косвенные свидетельства зарядовой универсальности взаимодействия нуклонов. Структура уровней ядер-изобар, то есть ядер,

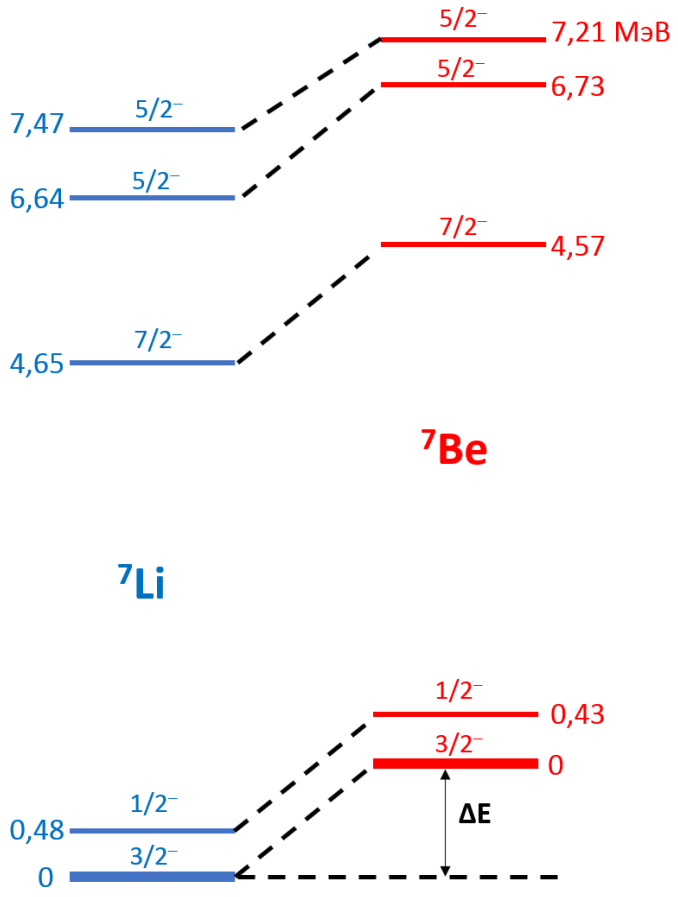

Рис. 2.1: Изодублеты уровней ядер ^{7}Li и ^{7}Be

у которых число нейтронов одного равно числу протонов другого (так называемые *зеркальные ядра*), очень похожи[1]. Например, на рис. 2.1 приведены изодублеты уровней ядер ^{7}Li и ^{7}Be. Эти ядра имеют проекции изоспина $-1/2$ и $+1/2$ соответственно. По правилу (2.3) изоспин основного состояния для них $1/2$. Уровни этих ядер образуют ядерные изодублеты. Они сдвинуты на величину $\Delta E = \Delta E_Q - (m_n - m_p)$, где ΔE_Q — разность кулоновских энергий ядер. Другими примерами подобного явления могут служить пары ядер ^{17}O $-^{17}$ F или ^{41}Ca $-^{41}$ Sc.

Одинаковая структура энергетических спектров зеркальных ядер является ярким свидетельством протон-нейтронной симметрии, отражающимся в идентичности сильных взаимодействий для таких ядер. Подобие свойств пар характерно не только для случая зеркальности. Близость свойств характерна и для пар ядер с одинаковым числом нуклонов, но отличающихся несколькими протонами.

Можно проследить связь изоспина с различными моделями атомного ядра.

[1] С точностью до кулоновского взаимодействия протонов, а также разности масс протона и нейтрона.

Например, в *капельной модели*, в которой ядро рассматривается как сферическая капля несжимаемой заряженной ядерной жидкости, изоспин входит как эмпирическая поправка. Действительно, пусть радиус капли $R = r_0 A^{1/3}$. Энергии связи ядра выражаются через сумму, учитывающую вклады объемной, поверхностной и кулоновской энергий, а также вклады энергии симметрии и энергии спаривания нуклонов[2]. В рамках такого подхода энергии связи основных состояний ядер описываются *формулой Вайцзеккера*

$$E_{\mathrm{b}}(A, Z) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(N-Z)^2}{4A} + a_5 A^{-3/4}. \tag{2.4}$$

Коэффициенты, входящие в эту формулу, оцениваются из экспериментальных данных: $a_1 = 15.75$ МэВ; $a_2 = 17.8$ МэВ; $a_3 = 0.711$ МэВ; $a_4 = 93.15$ МэВ; $a_5 = 0, \pm 34$ МэВ в зависимости от типа ядра[3]. Четвертое слагаемое в формуле Вайцзеккера, отражающее эффекты симметрии, пропорционально квадрату наименьшего из возможных изоспинов (см. выражение (2.3)).

Изоспин проявляется и в энергетических спектрах атомов, которые обычно описываются в рамках *оболочечных подходов*. Рассмотрим *изобары*, то есть ядра с одинаковым количеством нуклонов A, но разными числами протонов и нейтронов. Спектры возбужденных состояний для таких атомов очевидно различны. Однако в них наблюдаются так называемые *изобар-аналоговые состояния*. Член в выражении (2.4), отражающий эффекты симметрии, приводит к тому, что в предположении отсутствия кулоновских сил одно из ядер, характеризующееся меньшим из возможных изоспинов, характеризовалось бы большей энергией связи. При этом в спектре этого атома проявлялись бы уровни с изоспином его изобары, а энергии таких уровней совпадали бы. Учет кулоновского взаимодействия (третий член в формуле Вайцзеккера) приводит к сдвигу уровней, однако их структура сохраняется. Явление изобар-аналоговых состояний было открыто в 60-х годах прошлого века. В свое время оно позволило приблизиться к пониманию внутреннего устройства атомных ядер. Примерами изобар-аналоговых состояний являются проявления уровней с изоспином $T = 1$ в ядре ^{14}N. Пример проявления состояний такого рода (неупругое рассеяние нуклонов на ядре ^{14}N) рассматривается в заключительной части этой главы.

[2] Два последних слагаемых выходят за рамки чисто капельных представлений.

[3] Нулевое значение — для нечетных ядер, положительное — для четно-четных, а отрицательное — для нечетно-нечетных.

2.2 Правила отбора по изоспину для распадов ядер

Закон сохранения изоспина и его проекции соблюдается в сильных взаимодействиях. Примером этого могут служить нуклонные распады высоковозбужденных состояний ядер, для которых изоспин основного состояния не равен нулю. Такого возбуждения можно достичь при помощи рассеяния электронов, ведь электромагнитное взаимодействие меняет изоспин, при этом сохраняет его проекцию, которая остается неизменной для всех состояний ядра.

Для примера рассмотрим распад возбужденных состояний с изоспином 3/2 ядра ^{11}B, энергия которых выше энергии отделения и нейтрона, и протона:

$$^{11}\mathrm{B}^* \to^{10} \mathrm{Be} + p, \qquad ^{11}\mathrm{B}^* \to^{10} \mathrm{B} + n.$$

Эти распады обусловлены сильным взаимодействием, для которого должен быть выполнен закон сохранения изоспина системы. Электромагнитное возбуждение может изменить изоспин на 0 или 1, сохранив при этом проекцию изоспина, поэтому

$$T(^{11}\mathrm{B}) = 1/2, \quad T_3(^{11}\mathrm{B}) = -1/2, \quad T(^{11}\mathrm{B}^*) = 1/2, 3/2, \quad T_3(^{11}\mathrm{B}^*) = -1/2.$$

Для дочерних ядер и частиц —

$$T(^{10}\mathrm{B}) = 1, \quad T(^{10}\mathrm{B}) = 0, \quad T(p) = T(n) = 1/2.$$

Очевидно, что для распада с нейтроном следующее равенство не выполняется:

$$\frac{\vec{3}}{2} \neq \vec{0} + \frac{\vec{1}}{2}.$$

Экспериментально такой распад не наблюдается.

Изотопический спин может влиять, казалось бы, на такие не связанные с ним процессы, как β-распады ядер. В *теории Ферми* эти распады, проходящие под действием слабых сил, описываются сравнительным периодом полураспада $ft_{1/2}$, который обратно пропорционален квадрату матричного элемента, соответствующего переходу. Наименьшим значением $ft_{1/2} \approx 10^3$ обладают так называемые *сверхразрешенные переходы* типа $0^+ \to 0^+$. Однако среди таких переходов более десятка имеют на порядки большие значения; $ft_{1/2} \approx 10^6 - 10^{10}$. В теории β-распада можно показать, что матричный элемент подчиняется следующим правилам отбора по изоспину:

$$\Delta T = 0, \qquad \Delta T_3 = \pm 1. \tag{2.5}$$

Для $(0^+ \to 0^+)$-переходов с $ft_{1/2} \approx 10^3$ это правило выполняется. Для аналогичных переходов с большим $ft_{1/2}$ изоспин изменяется ($\Delta T = 1$). Таким образом, подавление β-распада по изоспину довольно сильное[4].

Правила отбора по изоспину вытекают из сравнения перекрытия волновых функций ядра в начальном и конечном состояниях. Для $\Delta T = 0$ такое перекрытие максимально, а значит, от ядра не требуется значительная перестройка внутренней структуры.

Правила отбора по изоспину важны и для электромагнитных переходов в ядрах. Например, для $E1$-переходов значение ΔT должно быть равно 0 или ± 1, за исключением переходов между состояниями с изоспином 0. Последнее запрещает переходы с $\Delta T = 0$ в ядрах с $T_3 = 0$. Для примера рассмотрим переходы в ядрах ^{14}O, ^{14}C и ^{14}N. Схема уровней для этих ядер приведена на рис. 2.2. Ядро ^{14}N содержит равное число протонов и нейтронов, поэтому для него $T_3 = 0$. Уровни со спин-четностью 1^- и 0^+ формируют изотриплеты. Электромагнитные переходы между ними проходят с испусканием $E1$-фотонов. Измеренные периоды полураспадов составляют: $1,2 \cdot 10^{-4}$ фс для ^{14}O; < 7 фс для^{14}C и 27 фс для ^{14}N. Таким образом, подавление по изоспину для ядер азота выражается в существенно большем времени жизни соответствующего уровня.

Другим примером проявления правил отбора по изоспину являются электромагнитные переходы с энергией 5,69 МэВ для уровня $T(J^P) = 0(1^-)$. $E1$-переход на основной уровень запрещен правилом отбора по изоспину. В то же время $E1$-переход на уровень 2,31 МэВ $T(J^P) = 1(0^+)$ разрешен. Интенсивность $E1$-переходов зависит от их энергии, как E_γ^3, и в отсутствие правил отбора по изоспину интенсивность первого перехода должна быть примерно в пять раз выше, чем второго. Тем не менее эксперимент показывает, что интенсивность перехода с меньшей энергией примерно в два раза выше. Таким образом, величина подавления по изоспину в приведенном случае достигает десяти.

2.3 Правила отбора по изоспину для ядерных реакций

Рассмотрим влияние изоспина на ядерные реакции. Пусть изоспин ядра-мишени — T_A, а изоспины ядер в конечном состоянии — T_B. Правила отбора для различных типов реакций приведены в табл. 2.1.

[4] Правило (2.5) соблюдается и для β-переходов других типов, где оно, однако, конкурирует с другими правилами отбора.

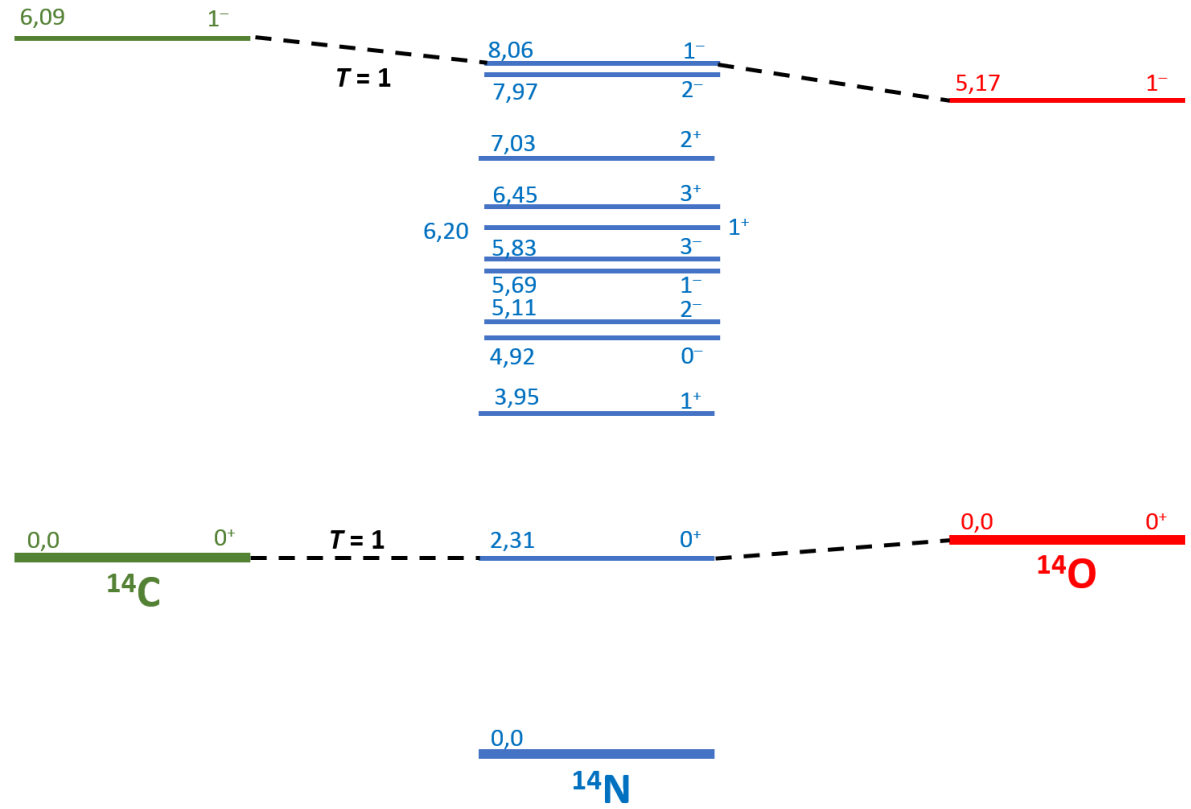

Рис. 2.2: Схема уровней ядер ^{14}C, ^{14}N и ^{14}O

Таблица 2.1: Правила отбора по изоспину для ядерных реакций

Тип реакции	ΔT	ΔT_3	T_B
$A(e,e')B$	0,1	0	T_A, $T_\text{A}+1$
Фотореакции	0,1	0	T_A, $T_\text{A}+1$
$A(p,p')B$	0,1	0	T_A, $T_\text{A}+1$
$A(\alpha,\alpha')B$	0	0	T_A
$A(p,n)B$	1	-1	$T_\text{A}-1$, T_A, $T_\text{A}+1$
$A(n,p)B$	1	$+1$	$T_\text{A}+1$
$A(\pi^-,\gamma)B$	1	$+1$	$T_\text{A}+1$
$A(\mu^-,\nu_\mu)B$	1	$+1$	$T_\text{A}+1$
$A(\pi^-,\pi^+)B$	2	$+2$	$T_\text{A}+2$

Так как изоспин сохраняется в реакциях, протекающих под действием сильного взаимодействия, то такие реакции можно использовать для определения изоспина возбужденных состояний ядра. В качестве примера рассмотрим неупругое рассеяние нуклонов на ядре ^{14}N. Возбуждения ядра азота альфа-частицами происходят как реакции упругого рассеяния, так и реакции неупругого рассеяния с возбуждением уровня с энергией 3,95 МэВ. При

этом неупругих реакций с возбуждением уровня с энергией 2,31 МэВ не наблюдается. Однако этот уровень возбуждается в реакциях с протонами. Это означает, что первый возбужденный уровень имеет изоспин 1. Действительно,

$$T(^{14}\mathrm{N}) = 0, \quad T(\alpha) = 0, \quad T(p) = 1/2.$$

Для рассеяния альфа-частиц —

$$\vec{0} + \vec{0} \neq \vec{1} + \vec{0},$$

а для протонов —

$$\vec{0} + \frac{\vec{1}}{2} \neq \vec{T} + \frac{\vec{1}}{2} \quad \to T = 0, 1.$$

Поскольку полный изоспин в электромагнитных взаимодействиях не обязательно сохраняется, возможно изменение его значения на 0 и на 1. В фото- и электроядерных реакциях возможно возбуждение как первого, так и второго из возбужденных состояний ^{14}N. При этом оказывается, что изоскалярное возбуждение менее интенсивно, чем изовекторное. Это связано с тем, что заряды и магнитные моменты протонов и нейтронов можно выразить через изоскалярные и изовекторные заряды и моменты нуклонов. Операторы заряда и магнитного момента для нуклонов записываются в виде

$$\hat{e} = e_{\mathrm{S}}\hat{1} + e_{\mathrm{V}}\sigma_3, \quad e_{\mathrm{S}} = e_{\mathrm{V}} = \frac{1}{2}, \tag{2.6}$$

$$\hat{\mu} = \mu_{\mathrm{S}}\hat{1} + \mu\mathrm{V}\sigma_3, \quad \mu_{\mathrm{S}} = \frac{\mu_p + \mu_n}{2}, \quad \mu_{\mathrm{V}} = \frac{\mu_p - \mu_n}{2}. \tag{2.7}$$

Здесь $\hat{1}$ — единичная матрица, σ_3 — третья из матриц Паули, $\mu_p = 2,793$ и $\mu_n = -1,913$ — магнитные моменты протона и нейтрона, выраженные в ядерных магнетонах.Соотношение изовекторных и изоскалярных магнитных моментов $\mu_{\mathrm{V}}/\mu_{\mathrm{S}} \approx 5,35$, что обусловливает изовекторное доминирование. Так, для $M1$-фотонов вероятность возбуждения пропорциональна квадрату отношения, то есть близка к 30. Измеренное соотношение вероятностей примерно в два раза меньше. Для учета этого эффекта при практических расчетах изоспиновых коэффициентов в реакциях возбуждения ядер вводят *фактор подавления* магнитных моментов нуклонов ядра за счет взаимодействия магнитных моментов нуклонов с ядерной средой.

Изовекторное возбуждение может протекать двумя способами: с и без изменения полного изоспина. Вероятности этих процессов определяются коэффициентами Клебша–Гордана $C^{TT_0}_{10T_0T_0}$. Подробнее об этих коэффициентах можно узнать из главы 4. Вероятности изовекторного возбуждения ветвей

мультипольного резонанса в зависимости от изоспина ядра-мишени приведены в табл. 2.2. По мере увеличения изоспина основного состояния ядра вероятность повышения изоспина падат по сравнению с вероятностью его сохранения.

Таблица 2.2: Изоспиновые коэффициенты для изовекторного возбуждения

T_0	0	1	2	3	4
T	1	1	2	3	4
K	1/3	1/6	2/15	3/28	4/45
T		2	3	4	5
K		1/10	1/21	1/36	1/55

3 Изоспин и лагранжианы

3.1 Функция Лагранжа

В классической механике системе ставится в соответствие лагранжиан, зависящий от обобщенных координат (q_i), скоростей ($\dot{q}_i$) и, возможно, непосредственно от времени (t) — $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$. Эта функция по определению равна разности кинетической и потенциальной энергий. При таком подходе траектория объекта (в фазовом пространстве) получается при помощи отыскания пути, который минимизирует *действие* (S) — интеграл от функции Лагранжа по времени. При минимизации действия получают *уравнения Эйлера–Лагранжа*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \tag{3.1}$$

В классической электродинамике систему тоже можно описать при помощи функции Лагранжа. Пусть $\vec{E}$ и $\vec{B}$ — векторы классических электрического и магнитного полей, а ϕ и $\vec{A}$ — соответствующие скалярный и векторный потенциалы. Плотности электрического заряда и тока обозначим ρ и $\vec{J}$. Тогда лагранжиан для классического электромагнитного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathrm{E}^2 - \mathrm{B}^2) - \rho\phi + \vec{A} \cdot \vec{J}. \tag{3.2}$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для лагранжиана (3.2) оказываются *уравнениями Максвелла.*

Физика элементарных частиц также формулируется с помощью лагранжианов, из которых при использовании правила *квантовой теории поля* (КТП) вычисляются все наблюдаемые. В КТП сумма лагранжианов частиц механической системы заменяется интегралом по некоторому объему пространства (V) от так называемой *лагранжевой плотности*, которую также называют *лагранжианом.* Соответственно, действие равно

$$S = \int_{t_0}^{t} \int_V \mathcal{L} d^3 r dt. \tag{3.3}$$

При этом в теории лагранжева плотность не зависит непосредственно от координат, а зависит от полевой функции и ее первых производных. Уравнения

Эйлера – Лагранжа имеют вид

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi_i(x^\mu))} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(x^\mu)} = 0. \tag{3.4}$$

Лагранжиан является единственной функцией, задающей динамику частиц. При этом он является скаляром в любом рассматриваемом пространстве, то есть инвариантным относительно преобразований этого пространства. Требования инвариантности $\mathcal{L}$ относительно преобразований Лоренца гарантируют лоренц-инвариантность всех предсказаний теории. Это является одной из основных причин того, что в физике элементарных частиц используют формализм Лагранжа.

Лагранжиан выражают через величины, характеризующие элементарные частицы. Составные частицы появляются в теории в виде связанных состояний, получаемых в результате решения уравнений для лагранжиана. Рассмотрим несколько примеров.

Лагранжиан свободной массивной скалярной частицы (поля[1]) записывается в виде

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}(\partial_\nu \phi)(\partial^\nu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{3.5}$$

Подставляя его в уравнение (3.4), получаем *уравнение Клейна – Гордона – Фока*

$$\partial_\nu \partial^\nu \phi + m^2 \phi = 0. \tag{3.6}$$

Для массивной частицы со спином 1/2, которая описывается 4-компонентным дираковским спинором, лагранжиан —

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\nu \partial_\nu \psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{3.7}$$

из которого можно получить *уравнение Дирака*

$$i\gamma^\nu(\partial_\nu \psi) - m\psi = 0. \tag{3.8}$$

В *квантовой электродинамике* (КЭД) квант электромагнитонго поля (*фотон*) описывается полем 4-потенциала $A^\mu = (\rho, \vec{A})$. Плотность лагранжиана для свободного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{3.9}$$

Здесь $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, определенный через 4-потенциал:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

[1] Так как частицам в КТП сопоставляются поля.

Электромагнитное взаимодействие можно ввести, потребовав инвариантности уравнения Дирака относительно $U(1)$ локального фазового преобразования:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = \psi \exp\{iq\chi(x)\}. \tag{3.11}$$

Тогда лагранжиан (3.7) преобразуется как

$$\mathcal{L}_D \longrightarrow \mathcal{L}_D - q\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\chi)\psi. \tag{3.12}$$

Для того чтобы восстановить калибровочную инвариантность, необходимо заменить производную (∂_μ) на *ковариантную производную* (D_μ):

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \tag{3.13}$$

При этом 4-потенциал преобразуется как

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi. \tag{3.14}$$

Таким образом, калибровочно-инвариантный лагранжиан для фермиона со спином 1/2 —

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \tag{3.15}$$

Откуда приходим к лагранжиану КЭД. Для электрона[2] —

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.16}$$

Определив ток как $j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, из уравнений Эйлера–Лагранжа получаем уравнения Максвелла в ковариантной форме:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{3.17}$$

3.2 Лагранжиан нуклон-нуклонного взаимодействия

Рассмотрим некоторые аспекты нуклон-нуклонного взаимодействия при невысоких энергиях. Для начала выведем потенциал взаимодействия в предположении, что взаимодействие идет при помощи обмена частицей (мезоном),

[2] $q = -e$.

масса которой (m) много меньше массы нуклона (M). Пусть нуклоны обмениваются скалярной частицей. Такое взаимодействие описывается следующей плотностью лагранжиана (или плотностью гамильтониана):

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\psi^{+}(x)\varphi(x)\psi(x) = -\mathcal{H}_{\text{int}}. \tag{3.18}$$

Здесь ψ — нуклонная волновая функция, а φ — мезонная. Соответствующая амплитуда перехода (или матричный элемент) между начальным (i) и конечным (f) состояниями задается интегралом

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle f|\,\mathcal{H}_{\text{int}}\,|i\rangle = \int \psi_f^{*}\mathcal{H}_{\text{int}}\psi_i \mathrm{d}V. \tag{3.19}$$

Разложим мезонное поле в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_k \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_k}} q_k \exp\Big\{i\vec{k}\vec{r}\Big\}, \tag{3.20}$$

где q_k — коэффициенты разложения, $\omega_k = \sqrt{k^2+m^2}$. Нормировка мезонного поля выбрана таким образом, что плотность пионов равна $2\omega_k|\varphi|^2$. Ряд Фурье соответствует представлению мюонного поля в виде суммы осцилляторов, а коэффициенты разложения играют роль координат этих осцилляторов. Проведя квантование мезонного поля, получаем матричные элементы

$$\langle n_k - 1|\,q_k\,|n_k\rangle = \langle n_k|\,q_k^{+}\,|n_k - 1\rangle = \sqrt{n_k}, \tag{3.21}$$

где n_k — число квантов. Нас будут интересовать переходы между состояниями с $n = 0$ и $n = 1$.

Обмен одним мезоном можно представить в виде суммы двух процессов. Во-первых, мезон может испускаться частицей с начальным импульсом p_1, а затем поглощаться второй частицей с начальным импульсом p_2. Во-вторых, может иметь место и обратная ситуация. Схематично эти два процесса показаны диаграммами на рис. 3.1.

Испускание и поглощение мезона с энергией ω_k и импульсом $\vec{k}$ описывается матричными элементами $g\sqrt{2\pi/\omega_k}$, а пропагаторы для первого и второго случаев — выражениями вида $(p_{1,2}^2/2M - \omega_k - (\vec{p}_{1,2} - \vec{k})^2/2M)^{-1}$. В силу того что мы рассматриваем нерелятивистские процессы, для которых характерные энергии много меньше массы нуклона, первым и третьим членами в пропагаторе можно пренебречь, а значит, матричный элемент, соответствующий сумме двух процессов, равен $-g^2 4\pi/\omega_k$. Взаимодействие в координатном пространстве находится при помощи преобразования Фурье и соответствует *потенциалу Юкавы*:

$$V(r) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int \frac{4\pi}{\omega_k}\exp\Big\{i\vec{k}\vec{r}\Big\}\mathrm{d}\vec{k} = -g^2\frac{\exp\{-mr\}}{r}. \tag{3.22}$$

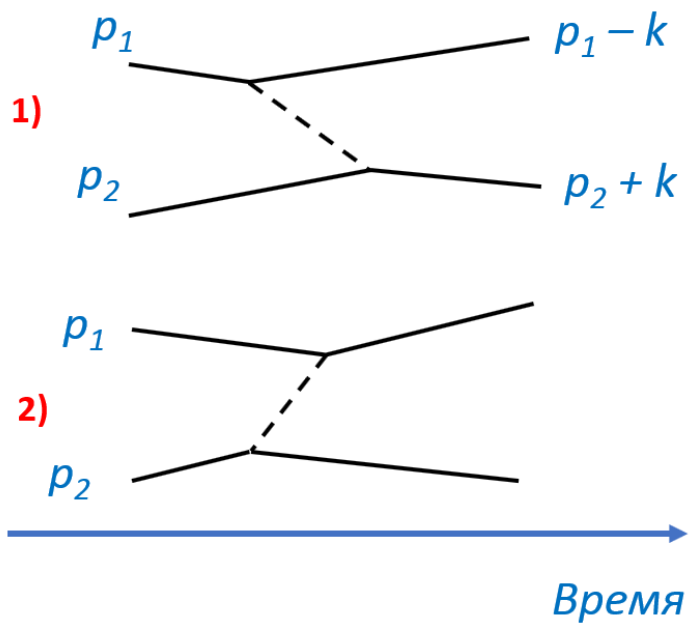

Рис. 3.1: Природа взаимодействия Юкавы. *Сплошной линией* показаны нуклоны, а *штрихованной* — мезоны

Сейчас установлено, что самым легким из мезонов, которые сильно взаимодействуют с нуклонами, является пионы — псевдоскалярные частицы (как нейтральные, так и обладающие электрическим зарядом). Как и в случае нуклонов, пионы практически одинаково взаимодействуют с другими адронами. Построим лагранжиан пион-нуклонного взаимодействия в общем виде. Он должен содержать набор операторов, связанных с рождением и уничтожением частиц. Пусть p^+ — оператор рождения протона или уничтожения антипротона, π^+ — оператор рождения отрицательно заряженного пиона или уничтожения положительно заряженного пиона, n — оператор уничтожения нейтрона или рождения антинейтрона и так далее. Кроме того, лагранжиан должен сохранять число нуклонов. Тогда в самом общем виде

$$\mathcal{L}_{\pi N} = g_{pn} p^+ n \pi^+ + g_{np} n^+ p \pi^- + g_{pp} p^+ p \pi^0 + g_{nn} n^+ n \pi^0. \tag{3.23}$$

Константы g_{pn}, g_{np}, g_{pp} и g_{nn} нужно подобрать так, чтобы $\mathcal{L}_{\pi N}$ был инвариантен относительно замены $p \longleftrightarrow n$.

Представим нуклонные и пионные поля в виде $SU(2)$-дублетов и триплетов:

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \qquad \vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}.$$

Для пионных полей зарядовые состояния выражаются через состояния π_1, π_2

и π_3 как

$$\pi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \pm i\pi_2), \qquad \pi^0 = \pi_3. \tag{3.24}$$

Пусть $\vec{\tau}$ — вектор, составленный из матриц Паули. Тогда скалярное произведение

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\pi_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\pi_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\pi_3 = \begin{pmatrix} \pi^0 & -\sqrt{2}\pi^+ \\ -\sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

может быть использовано для построения лагранжиана, инвариантного относительно поворота в изотопическом пространстве. Действительно, раскрывая

$$N^+\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}N = (p^+, n^+)\begin{pmatrix} \pi^0 & -\sqrt{2}\pi^+ \\ -\sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix},$$

получаем

$$N^+\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}N = p^+n\pi^+ - \sqrt{2}n^+p\pi^- - \sqrt{2}p^+p\pi^0 - n^+n\pi^0. \tag{3.26}$$

Если сравнить выражение (3.26) с выражением (3.23), легко получить соотношения для констант взаимодействия, а значит, установить изотопическую структуру лагранжиана.

Как отмечалось выше, пион — псевдоскалярная частица, обладающая электрическим зарядом. Поэтому для полного описания взаимодействия необходимо учесть спин нуклона. В нерелятивистском случае взаимодействие пиона с нуклонами описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \frac{f}{m}\psi^+(\vec{\sigma}\vec{\nabla})(\vec{\tau}\vec{\pi})\psi. \tag{3.27}$$

Такой лагранжиан приводит к потенциалу нуклон-нуклонного взаимодействия:

$$V(r) = \frac{f^2}{m^2}(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)(\vec{\sigma}_1\vec{\nabla})(\vec{\sigma}_2\vec{\nabla})\frac{\exp\{-mr\}}{r}. \tag{3.28}$$

Этот потенциал ответственен за силы, возникающие на больших расстояниях.

Помимо скалярных и псевдоскалярных мезонов, векторные мезоны играют существенную роль в нуклон-нуклонном взаимодействии. Они ответственны за силы отталкивания на малых расстояниях. Введение такого обменного взаимодействия в релятивистское уравнение приводит к сильному спин-орбитальному взаимодействию. Интересно, что существование векторных мезонов было постулировано Брейтом исходя из свойств спин-орбитального взаимодействия, полученного в результате фазового анализа рассеяния нуклона на нуклоне.

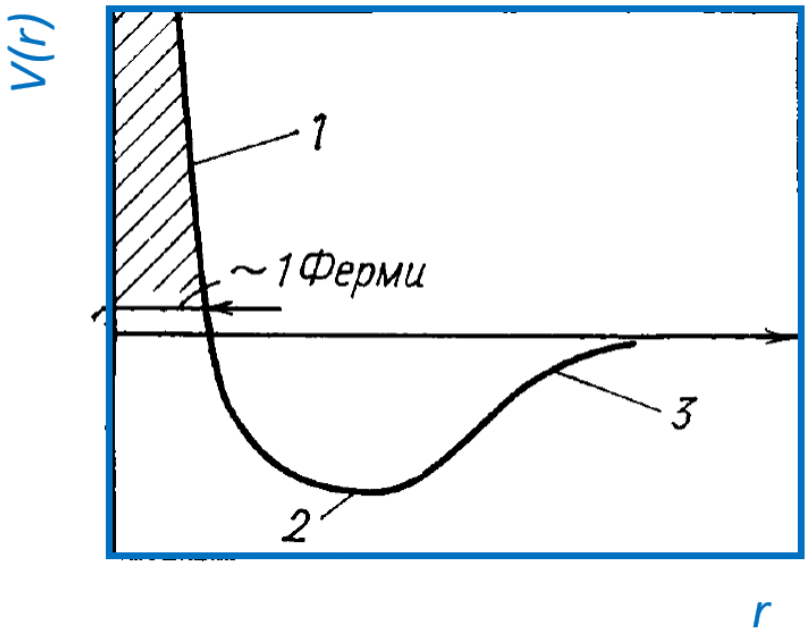

Рис. 3.2: Схематическое изображение потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия. Цифрами показаны области обмена векторным (1), скалярным (2) мезонами и однопионный обмен (3)

Подводя итог, можно отметить, что в мезонной теории потенциал нуклон-нуклонного взаимодействия в однобозонном приближении имеет вид, показанный на рис. 3.2. На больших расстояниях действует потенциал однопионного обмена (выражение (3.28)). На промежуточных расстояниях действует потенциал притяжения, являющийся суперпозицией потенциалов (3.22). Можно считать, что он создается скалярными мезонами с массой порядка или больше двух масс пиона. При этом изоспин входит в выражение для потенциала взаимодействия. На малых расстояниях действует потенциал отталкивания, обусловленный обменом векторными мезонами. С уменьшением расстояния отталкивающая часть потенциала быстро растет.

3.3 Лагранжиан квантовой хромодинамики

В КТП симметрия проявляется в виде инвариантности лагранжиана относительно какого-то преобразования. Рассмотрим лагранжиан КХД, состоящий из частей, соответствующих глюон-глюонному и кварк-глюонному взаимодействию, и части, отвечающей свободному кварковому полю. Выпишем его для случая u- и d-кварков:

$$L_{\mathrm{QCD}}(x) = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu a}(x)G^{a}_{\mu\nu}(x) + \sum_{q=u,d}\bar{\psi}_{q\alpha}(i\gamma^{\mu}D_{\mu(\alpha\beta)} - I\delta_{\alpha\beta}m_q)\psi_{q\beta}, \qquad (3.29)$$

где

- a — цветовой индекс глюона ($a = 1, \ldots, 8$, что соответствует цветному октету глюонов);
- $\psi_{q\beta}$ и $\bar{\psi}_{q\alpha} = \psi^{\dagger}_{q\beta}\gamma^0$ — дираковский и дираковски сопряженный 4-компонентные спиноры, отвечающие кварку конкретного аромата q и цвета (здесь $\alpha, \beta = \{1, 2, 3\} = \{\mathrm{red}, \mathrm{green}, \mathrm{blue}\}$ — цветовые индексы кварков);
- $D_{\mu(\alpha\beta)}$ — так называемая *длинная производная*;
- $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера;
- I — единичная матрица 2×2;
- m_q — масса соответствующего кварка.

В выражении (3.29) и далее используется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся индексу. Длинная производная записывается в виде

$$D_{\mu(\alpha\beta)} = \delta_{\alpha\beta}\partial_{\mu} - ig_s\frac{\lambda^{a}_{\alpha\beta}}{2}\mathrm{B}^{\mathrm{a}}_{\mu}(x). \qquad (3.30)$$

В этом выражении $\mathrm{B}^{\mathrm{a}}_{\mu}(x)$ соответствует глюонному полю, g_s — константе сильного взаимодействия, а $\lambda^{a}_{\alpha\beta}$ — матрицам Гелл-Манна. Заряды кварков не входят в L_{QCD}, и массы кварков — единственные отличающие аромат величины.

Сконструируем дополнительный столбец из спиноров (биспинор), на который должна действовать группа симметрии по изоспину:

$$\psi_{\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{u\alpha}(x) \\ \psi_{d\alpha}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}.$$

Цветовой индекс и зависимость от 4-координаты опустим, но всегда будем подразумевать. Такой столбец принадлежит гильбертову пространству размерности два. В этом пространстве возникают операторы (матрицы 2×2), которые действуют на спиноры. Самое общее преобразование можно записать в виде

$$\phi = \hat{A}\psi \quad \Leftrightarrow \quad \phi^i = A^i_j \psi^j. \tag{3.31}$$

Верхний индекс отражает то, что введенный нами спинор (столбец) контравариантный. Соответствующий ковариантный спинор (строка) будет преобразовываться оператором $\hat{A}^\dagger = (A^{\mathrm{T}})^*$. Закон его преобразования можно вывести при использовании свойства $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$, а также того факта, что гамма-матрицы Дирака и введенное нами преобразование действуют в разных пространствах и, следовательно, коммутируют. Итак,

$$\bar{\phi}_i = (\psi^1)^\dagger \gamma^0 = (A^i_j \psi^j)^\dagger \gamma^0 = (\psi^i)^\dagger \gamma^0 (A^i_j)^\dagger = \bar{\psi}_j (A^j_i)^*. \tag{3.32}$$

Теперь лагранжиан КХД может быть записан более компактно:

$$L_{\mathrm{QCD}}(x) = -\frac{1}{4} G^{\mu\nu a}(x) G^a_{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}_{j\alpha}(x)(i\gamma^\mu D_{\mu(\alpha\beta)} - I\delta_{\alpha\beta} m_q)\psi^j_\beta(x). \tag{3.33}$$

3.4 $SU(2)$-симметрия по изоспину для кварков

Какое преобразование $\hat{U}$, действующее в пространстве изоспина, оставляет инвариантным лагранжиан КХД? Подставим преобразования (3.31) и (3.32) в (3.33), заметив, что оно коммутирует со всеми членами выражения, находящимися в скобках:

$$\phi^i(x) = \hat{U}^i_j \psi^j(x) \quad \longrightarrow \quad \bar{\phi}_i(x) = (U^l_i)^* \bar{\psi}_l(x),$$

$$\bar{\phi}_{j\alpha}(x)(i\gamma^\mu D_{\mu(\alpha\beta)} - I\delta_{\alpha\beta} m_q)\phi^j_\beta(x) = \bar{\psi}_{l\alpha}(x)(i\gamma^\mu D_{\mu(\alpha\beta)} - I\delta_{\alpha\beta} m_q)(U^l_i)^*(U^i_j)\psi^j_\beta(x).$$

Откуда получаем *условие унитарности*

$$(U^l_i)^*(U^i_j) = \delta^l_j \quad \Leftrightarrow \quad \hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1}, \tag{3.34}$$

то есть наше преобразование принадлежит группе симметрии $U(2)$.

Воспользовавшись свойствами определителя матриц:

- $\det\left(\hat{A}\hat{B}\right) = \det\left(\hat{A}\right)\det\left(\hat{B}\right)$,
- $\det \hat{A}^* = (\det \hat{A})^*$,

- $\det \hat{A}^\dagger = (\det \hat{A})^*$,
- $\det \hat{A}^{\mathrm{T}} = \det \hat{A}$,

легко увидеть, что $|\det \hat{U}|^2 = 1$, а, следовательно, $\det \hat{U} = e^{i\xi}$. При этом фаза ξ не является физической. Поэтому, не потеряв общности, можно ограничиться рассмотрением группы $SU(2)$, для элементов которой определитель равен единице.

Группа $SU(2)$ возникает в физике частиц как группа симметрии частиц со спином 1/2. Генераторы группы $SU(2)$ (τ_i) выражаются через *матрицы Паули* (σ_i):

$$\tau_i = \sigma_i/2, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Соответствующие соотношения могут быть использованы и при исследовании изотопического спина. В пространстве изоспина столбец ψ, введенный ранее, может быть разложен по следующему базису:

$$|\psi\rangle = \psi_u |u\rangle + \psi_d |d\rangle, \quad |u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle u|d\rangle = 0. \tag{3.36}$$

Проекция изоспина вычисляется действием генератора τ_3 на соответствующее состояние. Например, для базисного состояния $|d\rangle$

$$\tau_3 |d\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}|d\rangle.$$

Состояния кварков записываются следующим образом:

$$|u\rangle = \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2} \right\rangle = |+\rangle,$$

$$|d\rangle = \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle = |-\rangle.$$

3.5 $SU(2)$-симметрия по изоспину для антикварков

Отличием группы симметрии по изоспину является то, что в природе присутствуют не только частицы, но и античастицы, в то время как понятия *антиспин* не существует. Как же преобразуется дублет антикварков?

Матрица преобразования $\hat{U}$ описывается восемью параметрами. Условие унитарности накладывает на эти параметры четыре условия, а требование $\det \hat{U} = 1$ — еще одно. Таким образом, остаются только три свободных параметра.

Любую матрицу 2×2 можно разложить по базису, состоящему из единичной матрицы и матриц Паули:

$$\hat{U} = b_0 \hat{1} + b_i \sigma_i = b_0 \hat{1} + \frac{1}{2} b_i \tau_i. \tag{3.37}$$

Роль скалярного произведения играет

$$|\psi\rangle = \sum C_i \, |\phi\rangle \quad \to \; C_i = \langle \phi | \psi \rangle \, .$$

Покажем некоторые свойства матрицы преобразования $\hat{U}$:

$$\det \hat{U} = 1. \tag{3.38}$$

Запишем $\hat{U}$ через генераторы группы симметрии:

$$\hat{U} = e^{i\omega_i \frac{\sigma_i}{2}} = e^{i\omega_i \tau_i}.$$

Используем свойство

$$\hat{A} = e^{\hat{B}} \quad \to \; \det \hat{A} = e^{\mathrm{Tr}\{\hat{B}\}}.$$

Тогда

$$\det \hat{U} = e^{i\omega_i \, \mathrm{Tr}\left\{\frac{\sigma_i}{2}\right\}} = e^0 = 1,$$

так как $\mathrm{Tr}\{\sigma_i\} = 0$.

Теперь покажем, что

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1. \tag{3.39}$$

Если операторы коммутируют, то выполняется следующее свойство:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}. \tag{3.40}$$

Снова используем запись $\hat{U}$ через генераторы группы симметрии:

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = e^{i\omega_i \frac{\sigma_i}{2}} e^{-i\omega_j \frac{\sigma_j}{2}}.$$

$$\left[\omega_i \frac{\sigma_i}{2}, \; \omega_j \frac{\sigma_j}{2}\right] = \frac{\omega_i \omega_j}{2} \left[\sigma_i, \sigma_j\right] = \frac{\omega_i \omega_j}{2} 2i \epsilon_{ijk} \sigma^k,$$

где $\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk}$; $\epsilon_{123} = 1$ – символ Леви-Чивиты. Произведение симметричного и антисимметричного тензоров дают 0. Пусть A – симметричный, а B – антисимметричный тензоры. Тогда

$$A^{ij\cdots}_{\cdots} B^{ij\cdots}_{\cdots} = A^{00\cdots}_{\cdots} B^{00\cdots}_{\cdots} + A^{12\cdots}_{\cdots} B^{12\cdots}_{\cdots} + A^{21\cdots}_{\cdots} B^{21\cdots}_{\cdots} + \cdots =$$

$$= A^{ij\cdots}_{\cdots} 0 + A^{12\cdots}_{\cdots} B^{12\cdots}_{\cdots} - A^{12\cdots}_{\cdots} B^{12\cdots}_{\cdots} + \cdots = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left[\omega_i \frac{\sigma_i}{2},\ \omega_j \frac{\sigma_j}{2}\right] = 0.$$

Тогда

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = e^{i\omega_i \frac{\sigma_i}{2}} e^{-i\omega_i \frac{\sigma_i}{2}} = e^{i\omega_i \left(\frac{\sigma_i}{2} - \frac{\sigma_i}{2}\right)} = \hat{1}. \tag{3.41}$$

Теперь рассмотрим волновые функции антикварков. Волновая функция антикварка может быть связана с волновой функцией кварка с помощью оператора зарядового сопряжения:

$$\psi_{\bar{u}}(x) = \psi_u^C(x) = \hat{C}\bar{\psi}_u^T(x),$$

где $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

Для биспинора $\psi^C(x) \neq \hat{C}\bar{\psi}^T(x)$. Поэтому найдем добавочный оператор $\hat{A}$ в изотопическом пространстве к оператору $\hat{C}$ в пространстве Минковского для преобразования биспиноров:

$$\psi^C(x) = \hat{A}\begin{pmatrix} \psi_u^C(x) \\ \psi_d^C(x) \end{pmatrix} = \hat{A}\begin{pmatrix} \hat{C}\bar{\psi}_u^T(x) \\ \hat{C}\bar{\psi}_d^T(x) \end{pmatrix} = \hat{A}\hat{C}\begin{pmatrix} \bar{\psi}_u^T(x) \\ \bar{\psi}_d^T(x) \end{pmatrix} = \hat{A}\hat{C}\bar{\psi}^T(x).$$

Преобразование волновых функций будет

$$\phi^C = \hat{U}\psi^C = \hat{U}\hat{A}\hat{C}\bar{\psi}^T.$$

С другой стороны,

$$\phi^C = \hat{A}\hat{C}\bar{\phi}^T = \hat{A}\hat{C}\left(\bar{\psi}\hat{U}^\dagger\right)^T = \hat{A}\hat{C}\hat{U}^*\bar{\psi}^T = \hat{A}\hat{U}^*\hat{C}\bar{\psi}^T.$$

Сравнивая два выражения, получим

$$\hat{U}\hat{A}\hat{C}\bar{\psi}^T = \hat{A}\hat{U}^*\hat{C}\bar{\psi}^T \quad \Longrightarrow \quad \hat{U}\hat{A} = \hat{A}\hat{U}^*.$$

$$\hat{U} = \hat{A}\hat{U}^*\hat{A}^{-1},$$

$$\exp\left\{i\omega_i \frac{\sigma_i}{2}\right\} = \hat{A}\exp\left\{-i\omega_i \frac{\sigma_i^*}{2}\right\}\hat{A}^{-1},$$

$$\hat{1}\cdot\cos\left(\frac{|\bar{\omega}|}{2}\right)+\frac{i\omega_i\sigma_i}{|\bar{\omega}|}\sin\left(\frac{|\bar{\omega}|}{2}\right)=\hat{1}\cdot\cos\left(\frac{|\bar{\omega}|}{2}\right)-\frac{i\omega_i}{|\bar{\omega}|}\hat{A}\sigma_i^*\hat{A}^{-1}\sin\left(\frac{|\bar{\omega}|}{2}\right).$$

Отсюда

$$\hat{A}\sigma_i^*\hat{A}^{-1}=-\sigma_i.$$

Рассмотрим оператор

$$\hat{A}=i\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

Подействовав этим оператором на биспинор, имеем

$$\psi^{C(i)}(x)=\hat{A}\begin{pmatrix}\psi_{\bar{u}}\\ \psi_{\bar{d}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{\bar{u}}\\ \psi_{\bar{d}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_{\bar{d}}\\ -\psi_{\bar{u}}\end{pmatrix}.$$

Каким изотопическим состояниям соответствуют $\bar{u}$ и $\bar{d}$?

$$\tau_3\left|\bar{u}\right\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\left|\bar{u}\right\rangle.$$

Аналогично

$$\tau_3\left|\bar{d}\right\rangle=+\frac{1}{2}\left|\bar{d}\right\rangle.$$

В другой записи:

$$\left|\bar{d}\right\rangle=\left|I=\frac{1}{2},I_3=+\frac{1}{2}\right\rangle=\left|\bar{+}\right\rangle,$$

$$\left|\bar{u}\right\rangle=\left|I=\frac{1}{2},I_3=-\frac{1}{2}\right\rangle=\left|\bar{-}\right\rangle.$$

3.6 Сохранение изоспина и его проекции в сильных взаимодействиях

В квантовой механике операторы, соответствующие совместно наблюдаемым величинам, коммутируют. Генераторы группы $SU(2)$ не коммутируют:

$$[\tau_i,\tau_j]=i\epsilon_{ijk}\tau_k. \tag{3.43}$$

Однако из генераторов можно построить так называемый *оператор Казимира* ($\bar{\tau}^2$), который будет коммутировать со всеми генераторами группы $SU(2)$:

$$\bar{\tau}^2=\tau_i\tau_j=\frac{1}{4}\sigma_i\sigma_j=\frac{3}{4}\hat{1}. \tag{3.44}$$

Для него справедливо

$$[\bar{\tau}^2,\tau_i]=0. \tag{3.45}$$

То есть мы можем сказать, что соответствующая наблюдаемая $\bar{\tau}^2$ может наблюдаться совместно с любой из проекций[3].

Согласно *теореме Нётер* симметрия лагранжиана относительно преобразований той или иной группы приводит к возникновению сохраняющихся токов. В случае группы $SU(2)$ таких токов будет три. Выражение для токов записывается следующим:

$$j_i^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\tau_i\gamma^\mu\psi(x). \tag{3.46}$$

Во-первых, сохраняется нулевая компонента тока (заряд):

$$Q_i(t) = \int_V \mathrm{d}\vec{x} j_i^0(x) = \int_V \mathrm{d}\vec{x}\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0\frac{\sigma_i}{2}\psi(x) = \int_V \mathrm{d}\vec{x}\psi^\dagger(x)\frac{\sigma_i}{2}\psi(x), \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial Q_i(t)}{\partial t} = 0. \tag{3.48}$$

Возьмем $i = 3$, тогда

$$T_3 = \int_V \mathrm{d}\vec{x}\psi^\dagger(x)\frac{\sigma_3}{2}\psi(x). \tag{3.49}$$

Для оператора $\bar{\tau}^2$

$$\int_V \mathrm{d}\vec{x}\psi^\dagger(x)\bar{\tau}^2\psi(x) = \frac{3}{4}\int_V \mathrm{d}\vec{x}\psi^\dagger(x)\bar{\tau}^2\psi(x) = \frac{3}{4}. \tag{3.50}$$

Здесь интегральная часть равна единице из-за нормировки волновой функции в квантовой теории поля. Из выражения (3.50) следует $T(T+1) = 3/4$, а значит, полный изоспин равен $1/2$.

3.7 $SU(2)$-инвариантность и теорема Нётер

Рассмотрим инфинитозимальное преобразование и разложим $\hat{U} = \exp\{i\omega_i\frac{\sigma_i}{2}\}$ в ряд:

$$\hat{U} \approx \hat{1} + i\omega_i\tau_i, \qquad \phi(x) = \hat{U}\psi(x) \approx \psi(x) + i\omega_i\tau_i\psi(x).$$

Вариация $\psi(x)$ —

$$\delta\psi(x) = \phi(x) - \psi(x) = i\omega_i\tau_i\psi(x).$$

Для 4-производной $\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$ имеем

$$\partial_\mu\delta\psi = \delta\partial_\mu\psi.$$

[3] Обычно в качестве второй наблюдаемой выбирается третья компонента.

Действительно,

$$\partial_\mu \delta\psi = \partial_\mu \phi(x) - \partial_\mu \psi(x).$$

Варьируем лагранжиан КХД:

$$\delta L_{\text{QCD}}(x) = L_{\text{QCD}}(\hat{U}\psi, \partial_\mu(\hat{U}\psi)) - L_{\text{QCD}}(\psi, \partial_\mu(\psi)) = \frac{\partial L_{\text{QCD}}}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial L_{\text{QCD}}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta(\partial_\mu \psi).$$

Для антиспиноров то же самое. Теперь меняем местами вариацию и производную в последнем слагаемом и подставляем (из *уравнения Лагранжа*) $\partial_\mu \frac{\partial L_{\text{QCD}}}{\partial(\partial_\mu \psi)}$ вместо $\frac{\partial L_{\text{QCD}}}{\partial \psi}$:

$$\delta L_{\text{QCD}}(x) = \Big(\partial_\mu \frac{\partial L_{\text{QCD}}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\Big)\delta\psi + \frac{\partial L_{\text{QCD}}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\partial_\mu(\delta\psi) = \partial_\mu\Big(\frac{\partial L_{\text{QCD}}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta\psi\Big). \tag{3.51}$$

Итак,

$$\delta L_{\text{QCD}}(x) = -\omega_i \partial_\mu\Big(-i\frac{\partial L_{\text{QCD}}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\tau_i \psi\Big) = 0. \tag{3.52}$$

Выражение в скобках — ни что иное как ток $j_i^\mu(x) = \bar{\psi}\gamma^\mu \tau_i \psi$, ведь производная ∂_μ входит в лагранжиан как первое слагаемое в длинной производной, а значит, дифференцирование лагранжиана по ней дает $i\bar{\psi}\gamma^\mu$. Таким образом, получили сохранение тока:

$$\partial_\mu j_i^\mu(x) = 0, \tag{3.53}$$

что и требовалось доказать.

Сохраняется также и заряд:

$$Q_i(t) = \int dx j_i^0(x) - \tag{3.54}$$

интеграл по нулевой компоненте тока. Действительно, из $\partial^\mu j_\mu = \frac{\partial j^0}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j}(x)$ следует

$$\frac{\partial Q_i(t)}{\partial t} = \int dx \partial_\mu j_i^\mu(x) - \int_V dx(\vec{\nabla}\vec{j}(x)). \tag{3.55}$$

Первое слагаемое равно нулю из выражения (3.53), а во втором (по теореме Остроградского – Гаусса) можно перейти от интегрирования по объему (V) к интегрированию по поверхности, ограничивающей этот объем (Σ):

$$\int_V dx(\vec{\nabla}\vec{j}(x)) = \int_\Sigma d\vec{\Sigma} j_i(x).$$

По правилам КТП интеграл по поверхности зануляется, поэтому второе слагаемое также равно нулю, а следовательно, $\frac{\partial Q_i(t)}{\partial t} = 0$, что и означает сохранение изотопического заряда.

4 Сложение квантово-механических векторов

При обсуждении коэффициентов Клебша – Гордана будем придерживаться обозначений теории углового момента. При этом для изоспинового пространства все выкладки остаются теми же с точностью до переобозначения.

4.1 Угловой момент

В квантовой механике момент импульса квантуется. Этой величине ставится в соответствие векторный оператор углового момента: $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$. Проекции этого оператора связаны коммутационным соотношением

$$[j_k, j_l] = i\varepsilon_{klm} j_m, \quad k, l, m \ \in \{x, y, z\}. \tag{4.1}$$

Оператор квадрата углового момента вводится как $j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$. Он коммутирует со всеми проекциями оператора углового момента. Состояния квантово-механической системы, характеризующиеся угловым моментом $\vec{j}$, определяются двумя квантовыми числами, j и m:

$$j^2 \left|jm\right\rangle = j(j+1) \left|jm\right\rangle, \tag{4.2}$$

$$j_z \left|jm\right\rangle = m \left|jm\right\rangle. \tag{4.3}$$

Теперь рассмотрим систему, характеризующуюся двумя моментами: j_1, действующим в пространстве V_1, и j_2, действующим в V_2. Также можно определить оператор полного момента, действующий в тензорном произведении этих пространств $V_1 \otimes V_2$. Он задается следующим образом:

$$(\mathbf{j} \otimes 1)|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle \equiv \mathbf{j}|j_1\, m_1\rangle \otimes |j_2\, m_2\rangle, \tag{4.4}$$

$$(1 \otimes \mathbf{j})|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle \equiv |j_1\, m_1\rangle \otimes \mathbf{j}|j_2\, m_2\rangle. \tag{4.5}$$

Оператор $\vec{J} \equiv \mathbf{j} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{j}$ обладает всеми свойствами оператора углового момента.

Теперь система может быть рассмотрена в двух базисах:

- $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$ — базис произведения собственных пространств отдельных моментов;
- $|JMj_1j_2\rangle$ — базис собственных векторов.

Коэффициенты векторного сложения, или *коэффициенты Клебша – Гордана*, задают переход между этими базисами. Они являются решениями уравнения

$$|J\,M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} |j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle. \tag{4.6}$$

Существует много обозначений коэффициентов Клебша – Гордана. Например,

$$C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \equiv \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 | J\, M\rangle.$$

В явном виде они задаются выражением

$$C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} = \delta_{M\, m_1+m_2} \times \sqrt{\frac{(2J+1)(J+j_1-j_2)!(J-j_1+j_2)!(j_1+j_2-J)!}{(j_1+j_2+J+1)!}} \times$$

$$\times \sqrt{(J+M)!(J-M)!(j_1-m_1)!(j_1+m_1)!(j_2-m_2)!(j_2+m_2)!} \times$$
$$\sum_k \frac{(-1)^k}{k!(j_1+j_2-J-k)!(j_1-m_1-k)!(j_2+m_2-k)!(J-j_2+m_1+k)!(J-j_1-m_2+k)!}. \tag{4.7}$$

Суммирование производится по всем целым k, для которых каждый из факториалов неотрицателен. В выражении (4.7) опущены решения для $M < 0$ и $j_1 < j_2$. Они могут быть получены из соотношений:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 \mid j_1, j_2; J, M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_1, j_2; -m_1, -m_2 \mid j_1, j_2; J, -M\rangle,$$

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 \mid j_1, j_2; J, M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2, j_1; m_2, m_1 \mid j_2, j_1; J, M\rangle.$$

4.2 Использование таблиц Particle Data Group

На практике вместо использования выражения (4.7) используются готовые таблицы коэффициентов. Рассмотрим нотацию, принятую в буклетах Particle Data Group (рис. 4.1). В левом верхнем углу таблицы[1] указываются значения j_1 и j_2. Столбцы соответствуют значениям полного момента системы (J) и

[1] На месте надписи Notation.

его проекции (M), строки — проекциям моментов подсистем (m_1 и m_2). Соответствующие коэффициенты указаны в серых ячейках таблицы. При этом значения указаны с точностью до квадратного корня. Так, например, значению $-1/2$ соответствует коэффициент $-\sqrt{1/2}$.

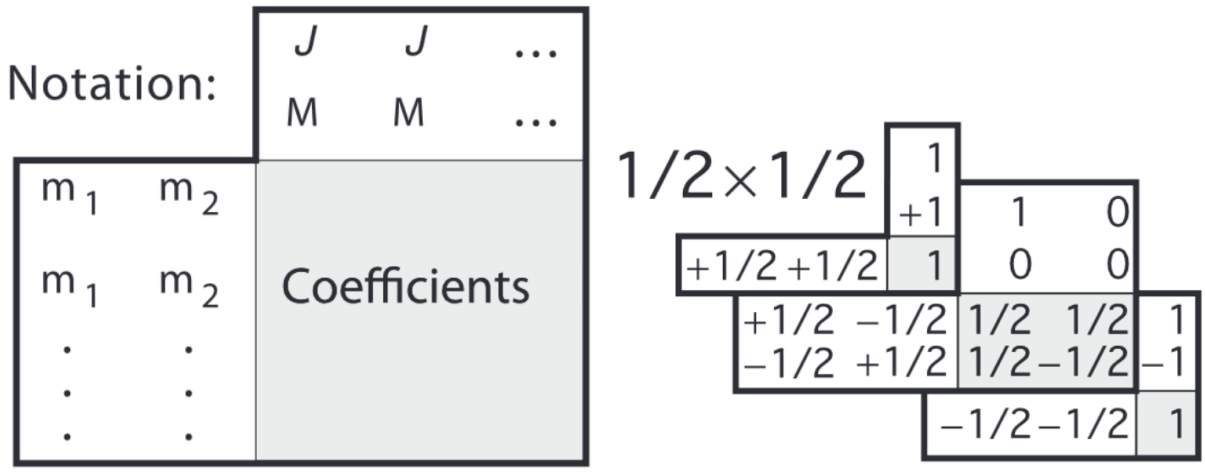

Рис. 4.1: Нотация Particle Data Group (*слева*); коэффициенты Клебша–Гордана для $j_1 = \frac{1}{2}$ и $j_2 = \frac{1}{2}$ (*справа*)

Также для вычислений коэффициентов Клебша–Гордана можно использовать специальный модуль библиотеки `sympy` для языка программирования `python`. Листинг команд для расчета коэффициента, соответствующего $C^{11}_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$, приведен ниже.

```
>>> from sympy.physics.quantum.cg import CG
>>> from sympy import S
>>> cg = CG(S(3)/2, S(3)/2, S(1)/2, -S(1)/2, 1, 1)
>>> cg
CG(3/2, 3/2, 1/2, -1/2, 1, 1)
>>> cg.doit()
sqrt(3)/2
```

Этот же коэффициент можно получить из таблицы, приведенной на рис. 4.2.

$3/2 \times 1/2$										
								2		
								+2		
							2		1	
							+1		+1	
+3/2	+1/2						1			
		+3/2	−1/2			1/4		3/4		
		+1/2	+1/2			3/4		−1/4		
							2		1	
							0		0	
				+1/2	−1/2			1/2		1/2
				−1/2	+1/2			1/2		−1/2
							2		1	
							−1		−1	
						−1/2		−1/2		
						−3/2		+1/2		
							3/4		1/4	
							1/4		−3/4	
										2
										−2
							−3/2		−1/2	
										1

Рис. 4.2: Коэффициенты Клебша – Гордана для $j_1 = \frac{3}{2}$ и $j_2 = \frac{1}{2}$

5 $SU(3)$-симметрия

5.1 Матрицы Гелл-Манна и гиперзаряд

Как показано в главе 3, в КХД симметрия по изоспину возникает вследствие малой разницы масс u- и d-кварков. Можно расширить симметрию по аромату кварка и на случай третьего странного кварка (s). Масса s примерно на 100 МэВ больше масс u и d, однако эта разница все же существенно меньше энергии связи барионов (порядка 1 ГэВ), что делает такой подход разумным.

Расширенная симметрия может быть выражена через унитарную матрицу 3×3:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

В общем $\hat{U}$ содержит 9 комплексных (18 вещественных) параметров. Условие унитарности ($\hat{U}^\dagger \hat{U} = I$) накладывает девять ограничений, и поэтому $\hat{U}$ может быть выражена через девять линейно независимых матриц 3×3. Одна из этих матриц, единичная (домноженная на некоторую комплексную фазу), не приводит к изменению состояния по аромату. Остальные восемь матриц формируют специальную группу симметрии $SU(3)$. Они могут быть выражены через генераторы этой группы:

$$\hat{U} = \exp\left\{ i\alpha \hat{T} \right\}. \tag{5.2}$$

Генераторы группы выражаются через λ-матрицы ($\hat{T} = \frac{1}{2}\lambda$), действующие на $SU(3)$-представления u-, d- и s-кварков:

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Группа симметрии между u-, d- и s-кварками должна отражать их попарную симметрию. То есть группа симметрии $SU(3)$ содержит подгруппы симметрии $SU(2)$. Например, если необходимо отразить симметрию между

u- и d-кварками, то соответствующая 3×3-матрица (λ_1, λ_2 и λ_3) должна содержать 2×2-матрицы Паули в левом верхнем углу:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Действительно, если определить повышающий и понижающий операторы, а также оператор проекции изоспина как

$$\hat{T}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \qquad \hat{T}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \tag{5.5}$$

то их действия на волновые функции кварков будут:

$$\hat{T}_3 \left|u\right\rangle = \frac{1}{2}\left|u\right\rangle, \qquad \hat{T}_3 \left|d\right\rangle = -\frac{1}{2}\left|d\right\rangle, \qquad \hat{T}_3 \left|s\right\rangle = 0, \tag{5.6}$$

$$\hat{T}_+ \left|d\right\rangle = +\left|u\right\rangle, \qquad \hat{T}_- \left|u\right\rangle = +\left|d\right\rangle, \qquad \hat{T}_\pm \left|s\right\rangle = 0. \tag{5.7}$$

Аналогично симметрия между u- и s-кварками, равно как и симметрия между d и s, может быть получена при помощи матриц Паули:

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Из девяти матриц, выписанных выше, лишь восемь являются независимыми. Одна матрица из тройки λ_3, λ_X и λ_Y может быть выражена через три другие. Так как симметрия по изоспину соблюдается лучше, то логично оставить λ_3 генератором, выразив последний генератор λ_3 через λ_X и λ_Y:

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_X + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Действие λ_8 на волновые функции u- и d-кварков симметрично. Матрицы λ_{1-8} называют *матрицами Гелл-Манна.*

Напомним, что в случае симметрии $SU(2)$ коммутаторы матриц Паули не равны нулю. Это приводит к тому, что совместно наблюдаемы полный изоспин $\hat{T} = \hat{T}_1 + \hat{T}_2 + \hat{T}_3$ и одна из его проекций ($\hat{T}_3$). Аналогом полного изоспина

для случая $SU(3)$ будет

$$\hat{T} = \sum_{k=1}^{8} \hat{T}_k = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Нетрудно показать, что из всех матриц Гелл-Манна только λ_3 и λ_8 коммутируют, а значит, только им в соответствие могут быть поставлены независимые наблюдаемые. В дополнение к оператору проекции изоспина вводится оператор *гиперзаряда*

$$\hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8. \tag{5.12}$$

Его действие на волновые функции кварков таково:

$$\hat{Y}\,|u\rangle = +\frac{1}{3}\,|u\rangle\,, \qquad \hat{Y}\,|d\rangle = +\frac{1}{3}\,|d\rangle\,, \qquad \hat{Y}\,|s\rangle = -\frac{2}{3}\,|s\rangle\,. \tag{5.13}$$

Таким образом, состояние по аромату задается уникальным образом проекцией изотопического спина $T_3 = n_u - n_d$ и гиперзарядом $Y = \frac{1}{3}(n_u + n_d - 2n_s)$.

По аналогии с лестничными операторами для изоспина на основе матриц Гелл-Манна можно ввести еще два набора повышающих и понижающих операторов:

$$\hat{V}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5), \qquad \hat{U}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7), \tag{5.14}$$

$$\hat{V}_+\,|s\rangle = +\,|u\rangle\,, \qquad \hat{V}_-\,|u\rangle = +\,|s\rangle\,, \tag{5.15}$$

$$\hat{U}_+\,|s\rangle = +\,|d\rangle\,, \qquad \hat{U}_-\,|d\rangle = +\,|s\rangle\,. \tag{5.16}$$

Изоспины и гиперзаряды для антикварков противоположны по знаку и равны по значению изоспинам и гиперзарядам кварков. Действия повышающих и понижающих операторов на них записываются как

$$\hat{T}_+\,|\bar{u}\rangle = -\left|\bar{d}\right\rangle, \qquad \hat{T}_-\left|\bar{d}\right\rangle = -\,|\bar{u}\rangle\,, \tag{5.17}$$

$$\hat{V}_+\,|\bar{u}\rangle = -\,|\bar{s}\rangle\,, \qquad \hat{V}_-\,|\bar{s}\rangle = -\,|\bar{u}\rangle\,, \tag{5.18}$$

$$\hat{U}_+\left|\bar{d}\right\rangle = -\,|\bar{s}\rangle\,, \qquad \hat{U}_-\,|\bar{s}\rangle = -\left|\bar{d}\right\rangle. \tag{5.19}$$

Остальные комбинации имеют нулевые собственные значения.

5.2 Октеты легких мезонов

В подходе $SU(3)$-симметрии проекция изоспина и гиперзаряд являются аддитивными квантовыми числами, определяющими кварковый состав адронного состояния. Рассмотрим легчайшие мезонные состояния ($|q\bar{q}\rangle$[1,2]), образованные u-, d- и s-кварками и соответствующими антикварками. Систематизация проводится следующим образом: сначала выписываются возможные кварк-антикварковые комбинации по T_3 и Y. Затем идентифицируются экстремальные (электрически заряженные) состояния. Из них при помощи повышающих и понижающих операторов конструируются все возможные нейтральные состояния, из которых строятся два линейно независимых состояния, соответствующих физическим мезонам. Последнее (синглетное) состояние строится как ортогональное этим двум.

Первый шаг проиллюстрирован на рис. 5.1. Частицы в построенном мультиплете обладают одинаковым спином и четностью. Если рассматривать мезоны, для которых орбитальный момент между кварком и антикварком равен нулю, то возможны лишь две комбинации:

- псевдоскалярные мезоны ($J^P = 0^-$);
- векторные мезоны ($J^P = 1^+$).

Четыре состояния для каждого из мультиплетов обладают открытой странностью. Этим состояниям ставят в соответствие K- и K^*-мезоны ($u\bar{s}$, $d\bar{s}$, $s\bar{u}$ и $s\bar{d}$). Также в мультиплеты должны входить изотопические триплеты: π- и ρ-мезоны. Заряженные изотриплетные состояния имеют кварковый состав $u\bar{d}$ и $d\bar{u}$.

Применим к идентифицированным (экстремальным) состояниям лестничные операторы согласно схеме, приведенной на рис. 5.2.

Имеем:

$$\hat{T}_+ |d\bar{u}\rangle = |u\bar{u}\rangle - \left|d\bar{d}\right\rangle, \qquad \hat{T}_- \left|u\bar{d}\right\rangle = \left|d\bar{d}\right\rangle - |u\bar{u}\rangle, \tag{5.20}$$

$$\hat{V}_+ |s\bar{u}\rangle = |u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle, \qquad \hat{V}_- |u\bar{s}\rangle = |s\bar{s}\rangle - |u\bar{u}\rangle, \tag{5.21}$$

$$\hat{U}_+ \left|s\bar{d}\right\rangle = \left|d\bar{d}\right\rangle - |s\bar{s}\rangle, \qquad \hat{U}_- |d\bar{s}\rangle = |s\bar{s}\rangle - \left|d\bar{d}\right\rangle. \tag{5.22}$$

Из этих шести выражений строятся два линейно независимых. Нейтральному π-мезону ставится в соответствие состояние $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - \left|d\bar{d}\right\rangle)$. Ортогональное ему строится в виде

$$\psi_2 = \alpha(|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle) + \beta(\left|d\bar{d}\right\rangle - |s\bar{s}\rangle). \tag{5.23}$$

[1] Для краткости в тексте будем писать $q\bar{q}$.

[2] В данном пособии выписываются не полные волновые функции, а лишь их составляющая по аромату кварков.

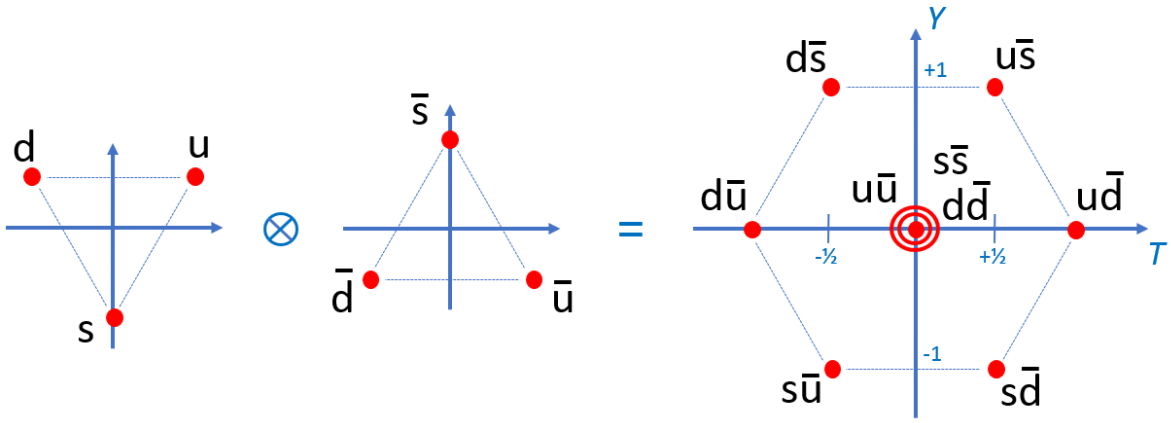

Рис. 5.1: Девять возможных состояний по аромату

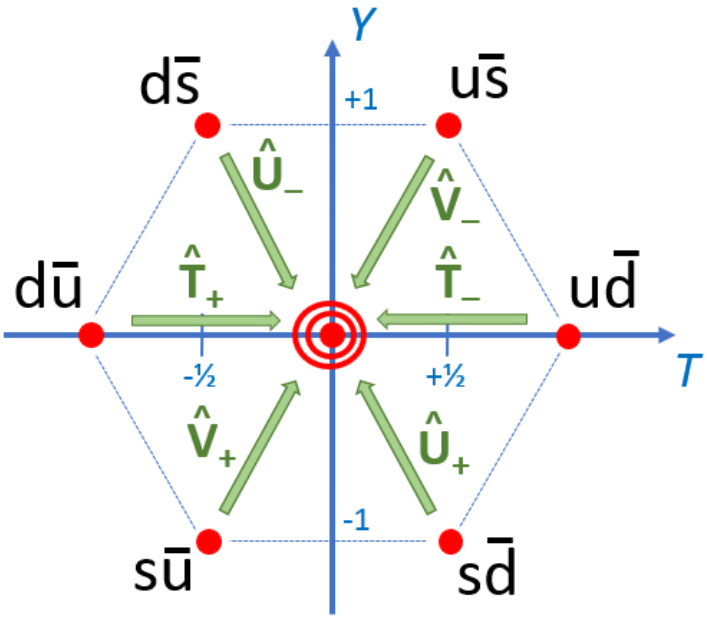

Рис. 5.2: Действие лестничных операторов на экстремальные состояния

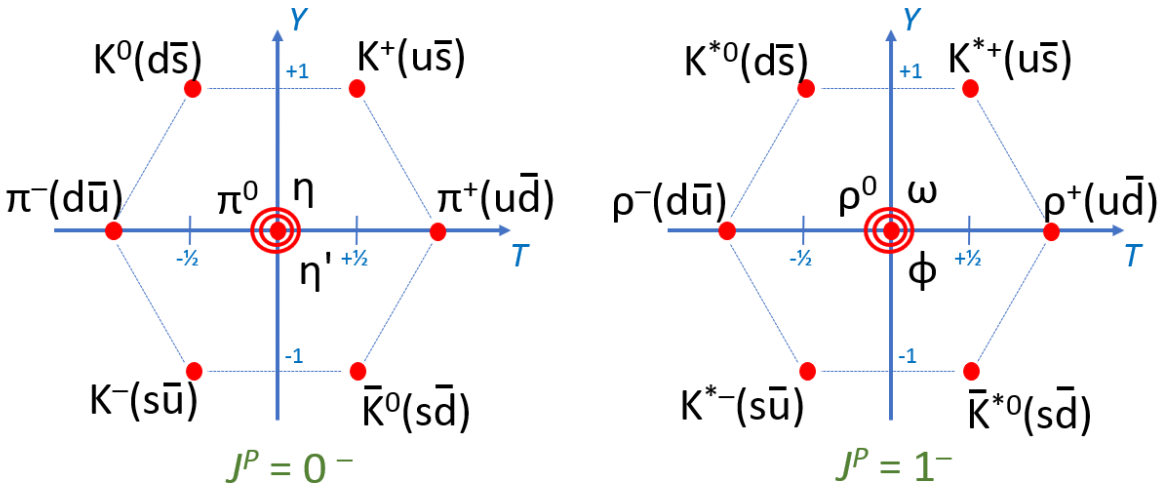

Рис. 5.3: Классификация псевдоскалярных (*слева*) и векторных (*справа*) мезонов

Коэффициенты α и β определяются из условий:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0, \qquad \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1. \tag{5.24}$$

Можно показать, что $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2\,|s\bar{s}\rangle)$. Последнее из девяти состояний (*синглетное*) нельзя получить при помощи лестничных операторов (оно не входит в *октет*), но его можно построить ортогональным по отношению к другим нейтральным волновым функциям (подобно условиям (5.24)). Условиям такого рода удовлетворяет $\psi_S = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle)$. Действие лестничных операторов на них дает 0. Например,

$$\hat{T}_+\,|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{q=u,d,s}\left\{\hat{T}_+\,|q\rangle\,|\bar{q}\rangle + |q\rangle\,\hat{T}_+\,|\bar{q}\rangle\right\}. \tag{5.25}$$

Выражения (5.7) и (5.17) дают ненулевые вклады в сумму, которые, впрочем, сокращаются. Таким образом, $\hat{T}_+\,|\psi_S\rangle = 0$.

Классификация легких мезонов приведена на рис. 5.3.

Так как $SU(3)$-симметрия по аромату неточная, синглет и октет могут смешиваться, то есть физические изоскалярные состояния $|f\rangle$ и $|f'\rangle$ являются смесью $|\psi_2\rangle$ и $|\psi_S\rangle$. Появляется дополнительный параметр, называемый *углом смешивания* (θ):

$$|f\rangle = |\psi_2\rangle\cos\theta - |\psi_S\rangle\sin\theta, \qquad |f'\rangle = |\psi_2\rangle\sin\theta + |\psi_S\rangle\cos\theta. \tag{5.26}$$

Часто соотношения (5.26) переписываются в базисе $(u\bar{u} + d\bar{d})$ и $s\bar{s}$. Такое расщепление достигается при *идеальном угле смешивания*, который определяется из $\tan\theta_{\rm i} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\theta_{\rm i} = 35{,}3$ градуса). Если определить угол $\varphi = \theta + 54,7$,

то для физического изоскаляра можно записать

$$|f'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)\cos\varphi + |s\bar{s}\rangle\sin\varphi. \tag{5.27}$$

При $\varphi = 90$ градусов достигается идеальное смешивание. Для получения ортогональной волновой функции $|f\rangle$ необходимо провести замену $\varphi \to \varphi - 90$.

Для псевдоскалярных и векторных мезонов характерны разные углы смешивания. Для первых $\theta = -11,3$ градуса. Таким образом, волновые функции физических состояний: $|\pi^0\rangle = |\psi_1\rangle$, $|\eta\rangle \approx |\psi_2\rangle$ и $|\eta'\rangle \approx |\psi_S\rangle$. Для векторных мезонов смешивание близко к идеальному ($\theta = -39,2$ градуса). Волновые функции для этих частиц:

$$|\rho^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \qquad |\omega\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), \qquad |\phi\rangle \approx |s\bar{s}\rangle\,.$$

5.3 U- и V-спины

Из трех легчайших кварков, u, d и s, первые два формируют дублет по изоспину. Структура $SU(3)$-симметрии подразумевает, что существуют три возможности сформировать кварковые дублеты. Помимо изоспина, это дублеты по

- U-спину, в который входят d- и s-кварки;
- V-спину для u и s.

С точки зрения теории групп $SU(3)$ может быть описана как через подгруппы $SU(2)_T \times U(1)_Y$, так и через $SU(2)_U \times U(1)_Q$, где Q — электрический заряд.

Так как s-кварк намного массивнее u и d, симметрии по U- и V-спинам соблюдаются менее строго, чем симметрия по изоспину. Тем не менее эти симметрии иногда используются, особенно для сектора очарованных и прелестных адронов. U-спин-симметрия часто применяется для электромагнитных распадов барионов. Дело в том, что d- и s-кварки, формирующие дублет по U-спину, несут одинаковый электрический заряд, и для них можно предположить симметрию по U.

Используя U-спин-симметрию, можно, например, получить предсказания для отношения парциальных ширин распадов $\Delta^- \to n\pi^-$ и $\Sigma^{*-} \to \Lambda\pi^-$. Частицы Δ^-, Σ^{*-}, Ξ^{*-} и Ω^- формируют квадруплет с $U = \frac{3}{2}$. Проекции U-спина на выделенную ось в соответствующем пространстве (U_3) для них будут $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$ соответственно. Математика коэффициентов Клебша–Гордана абсолютно идентична рассмотренной выше. Коэффициент, соответствующий $\Delta^- \to n\pi^-$, равен 1, и амплитуду этого перехода можно положить

равной A. Амплитуда распада $\Sigma^{*-} \to \Lambda\pi^-$ равна $A/\sqrt{2}$. При вычислении парциальных ширин следует учесть соотношение фазовых объемов. Соответствующий фактор фазового объема, необходимый для расчета парциальных ширин, для рассматриваемого случая электромагнитного перехода частицы со спином 3/2 в частицу со спином 1/2 пропорционален $|p^3|(E+M)/(M_{\mathrm{R}}M)$, где p — импульс частицы в системе центра масс, E и M — энергия и масса дочернего бариона, а M_{R} — масса распадающейся частицы. С учетом этого

$$\frac{\Gamma(\Delta^- \to n\pi^-)}{\Gamma(\Sigma^{*-} \to \Lambda\pi^-)} = 1.769 \times \frac{2A}{A} = 3.54.$$

Экспериментальное значение 3.44 ± 0.20 находится в согласии с предсказанием. Несмотря на это замечательное согласие, еще раз подчеркнем, что оценки, сделанные в предположении симметрии по U- или V-спинам, менее надежны по сравнению с оценками на основе симметрии по изоспину.

6 Другое использование термина «изоспин»

6.1 Цветовой изоспин

Квантово-полевые симметрии строятся на так называемых *принципах калибровочной инвариантности*. Для описания взаимодействия предполагается существование симметрий Вселенной относительно локальных фазовых преобразований. Группа симметрии, соответствующая этим преобразованиям, определяет вид уравнений движения.

В разделе 3.1 рассказывается, что квантовая электродинамика (КЭД) строится на основе группы симметрии $U(1)$. Инвариантность законов физики относительно локального фазового $U(1)$-преобразования означает появление в теории поля, которое взаимодействует с дираковской частицей так же, как взаимодействует с ней же фотон. Таким образом, вся КЭД, включая вывод уравнений Максвелла, выводится на основе калибровочной симметрии.

Аналогичным образом может быть построена и КХД — теория сильного взаимодействия. Для КХД группой калибровочной симметрии является группа $SU(3)$. Локальное фазовое преобразование, аналогичное (3.11), записывается в виде

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left\{ig_S(x)\alpha(x)\mathrm{T}\right\}\psi(x), \tag{6.1}$$

где $\mathrm{T} = \{T^a\}$ — восемь генераторов группы $SU(3)$ (восемь матриц Гелл-Манна). При этом в уравнении Дирака появляется новый член —

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig_S G^a_\mu T^a)\psi - m\psi = 0, \tag{6.2}$$

инвариантный относительно преобразования

$$G^k_\mu \to G^{k\prime}_\mu = G^k_\mu - \partial_\mu \alpha_k - g_S f_{ijk}\alpha_i G^j_\mu, \qquad [\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k. \tag{6.3}$$

Сравнивая полученные уравнения для КЭД и КХД (см. табл. 6.1), нетрудно видеть, что наличие матриц Гелл-Манна требует введения не одной константы, соответствующей заряду сильного взаимодействия (вектора-столбца зарядов).

Таблица 6.1: Сравние КЭД и КХД

Параметр	КЭД	КХД
Член взаимодействия	$-iq\gamma^\mu A_\mu\psi$	$-ig_S\frac{1}{2}\lambda^a\gamma^\mu G^a_\mu\psi$
Вершинный фактор	$-iq\gamma^\mu$	$-ig_S\frac{1}{2}\lambda^a\gamma^\mu$
Спинор для кварка	$u(p)$	$c_i u(p)$ или $u_i(p)$

Таким образом, генераторы группы $SU(3)$ (матрицы) действуют на $SU(3)$-представления цветовых зарядов кварков (r, g и b)[1], ортогональные состояния для цветового пространства:

$$c_1 = r = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad c_2 = g = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad c_3 = b = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Только частицы, обладающие цветовым зарядом, могут взаимодействовать с полем глюонов (G^a_μ). Частицы, нейтральные по цвету (например, лептоны), не чувствуют сильного взаимодействия. Кварки — фермионы, переносящие цветовой заряд, — существуют в трех ортогональных цветовых состояниях. Следует особо подчеркнуть, что, в отличие от $SU(3)$-симметрии по аромату, $SU(3)$-симметрия по цвету строго соблюдается, то есть КХД инвариантна относительно вращений в цветовом пространстве. Следствием этого является независимость силы КХД-взаимодействия от цветового заряда кварка.

В КЭД частицы, несущие электрический заряд, имеют античастицы, переносящие противоположный электрический заряд. В КХД античастицы (антикварки) переносят противоположный цветовой заряд $\bar{r}$, $\bar{g}$ и $\bar{b}$. Следуя обозначениям главы 5, цветовые конфигурации кварков и антикварков можно описать двумя аддитивными квантовыми числами: *третьей компонентой цветового изоспина* (T^c_3) и *цветовым гиперзарядом* (Y^c)[2]. Представления триплетов кварков и антикварков показаны на рис. 6.1.

Ток кварков, ассоциированный с вершиной КХД, может быть записан в виде

$$j^\mu_{\mathrm{q}} = \bar{u}(p')c^\dagger_j\Big\{-\frac{i}{2}g_S\lambda^a\gamma^\mu\Big\}c_i u(p). \tag{6.5}$$

[1] От *англ.* red, green и blue — красный, зеленый и синий.

[2] Индекс c добавлен для того, чтобы отличать эти квантовые числа от изоспина и гиперзаряда по аромату кварка.

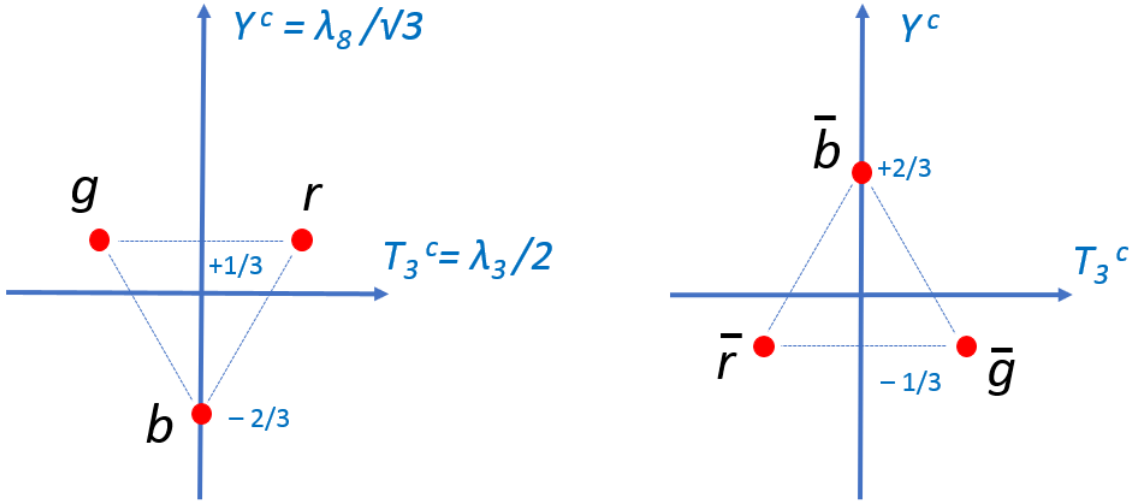

Рис. 6.1: Триплеты цветовых зарядов кварков и соответствующих антизарядов антикварков

Так как γ-матрицы (размерность 4×4) действуют на 4-компонентный дираковский спинор, а гелл-манновские λ-матрицы (3×3) действуют на 3-компонентную цветовую часть волновой функции кварка, выражение для тока можно факторизовать:

$$j_{\mathrm{q}}^{\mu} = -\frac{i}{2} g_S \left[c_j^{\dagger} \lambda^a c_i \right] \times \left\{ \bar{u}(p') \gamma^{\mu} u(p) \right\}. \tag{6.6}$$

При этом цветовая часть взаимодействия представляет собой просто число:

$$\left[c_j^{\dagger} \lambda^a c_i \right] = c_j^{\dagger} \begin{pmatrix} \lambda_{1i}^a \\ \lambda_{2i}^a \\ \lambda_{3i}^a \end{pmatrix} = \lambda_{ji}^a, \tag{6.7}$$

поэтому вершина взаимодействия записывается как $-\frac{i}{2} g_S \lambda_{ji}^a \gamma^{\mu}$. Таким образом, ненулевые элементы матриц Гелл-Манна несут информацию о поведении цвета при рассечении. Например, матрица λ_4 имеет ненулевые элементы $(1,3)$ и $(3,1)$, соответствующие изменениям цвета $r \to b$ и $b \to r$. Требование к тому, чтобы цвет сохранялся во взаимодействии, приводит к тому, что глюоны несут одновременно цветовой и антицветовой заряды.

Составление мультиплета для глюонов аналогично составлению мультиплета для мезонов в рамках подхода $SU(3)$-симметрии по аромату. Глюоны $r\bar{b}$, $b\bar{r}$, $g\bar{b}$, $b\bar{g}$, $g\bar{r}$, $r\bar{g}$, а также $(r\bar{r} - g\bar{g})/2$ и $(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})/\sqrt{6}$ формируют октет физических глюонов. Каждый из них соответствует одной из матриц Гелл-Манна. Заметим, что последние два выписанных глюонных состояния имеют $T_3^c = Y^c = 0$, однако участвуют во взаимодействии.

Кварки и глюоны не наблюдаются в свободном виде. Это объясняется так называемой *гипотезой конфайнмента* (пленения цвета), заключающейся в том, что цветовые объекты не могут распространяться как свободные частицы. Такими свободно распространяющимися частицами могут являться синглетные по цвету связанные состояния цветовых объектов — *адроны.* В настоящее время нет аналитического доказательства гипотезы конфайнмента, хотя она находит подтверждение в численных расчетах решеточной КХД. С другой стороны, нет ни одного экспериментального свидетельства о нарушении этой гипотезы.

Если бы группой симметрии сильного взаимодействия была группа $U(3)$ (вместо группы $SU(3)$), то при соблюдении конфайнмента существовал бы девятый синглетный глюон $(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})/\sqrt{3}$, который был бы аналогом фотона КЭД. Это привело бы к дальнодействию сильных сил, а значит, к совершенно другому устройству Вселенной по сравнению с тем, что мы наблюдаем.

Требования конфайнмента приводят к тому, что цветовая часть волновой функции адронов должна быть синглетна по цвету. Для мезонов такой конфигурацией будет уже упоминавшаяся

$$\psi^c(q\bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}), \tag{6.8}$$

а для барионов —

$$\psi^c(qqq) = \frac{1}{\sqrt{6}}(rgb - rbg + gbr - grb + brg - bgr). \tag{6.9}$$

Проверить правильность этих выражений можно, подействовав на них повышающими и понижающими операторами $T_\pm$, $V_\pm$ и $U_\pm$ и получив нулевое значение.

Волновые функции (6.8) и (6.9) удовлетворяют соотношениям $T_3^c = Y^c = 0$. Если, например, добавить к волновой функции мезона кварки или антикварк, то для такой квантовой системы невозможно построение синглетного состояния с нулевыми цветовым гиперзарядом и проекцией цветового изоспина. Поэтому, согласно гипотезе конфайнмента, такие связанные состояния в природе не существуют.

Помимо мезонной и барионной конфигурации, допускается и ряд иных, позволяющих построить синглетную волновую функцию по цвету. Сейчас достоверно установлено существование *тетракварковых* $(qq\bar{q}\bar{q})$ и *пентакварковых* $(qqqq\bar{q})$ состояний.

6.2 Слабый изоспин

Согласно Стандартной модели физики элементарных частиц — теории, описывающей микромир, слабое взаимодействие частиц является частью так называемого *электрослабого взаимодействия*. На небольших энергетических масштабах это взаимодействие можно рассматривать как два отдельных взаимодействия: электромагнитное и слабое. С обменной точки зрения слабые силы ассоциируется с обменом тяжелыми бозонами $W^{\pm}$ и Z^0 между истинно элементарными частицами.

Так же как и в случае КХД, построение электрослабой теории строится на принципе локальной калибровочной инвариантности. В основе теории лежит инвариантность относительно преобразований групп симметрии $SU(2)_L$ и $U(1)_Y$. Предполагается независимость результатов от преобразований волновой функции:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\{ig_W\hat{\alpha}(x)\frac{\hat{\sigma}}{2}\}\psi(x), \tag{6.10}$$

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\{ig'\frac{Y}{2}\zeta(x)\}\psi(x). \tag{6.11}$$

Сначала рассмотрим группу $SU(2)_L$ (преобразование (6.10)). Индекс L призван подчеркнуть, что W-бозонная часть взаимодействия действует только на левую киральную компоненту дираковского спинора[3]. Матрицы Паули действуют на дублеты (φ_L) по *слабому изоспину*:

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu^-\end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau^-\end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix}u\\ d'\end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix}c\\ s'\end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix}t\\ b'\end{pmatrix}_L.$$

Штрих для нижних кварковых компонент подчеркивает, что собственные состояния кварков по аромату не совпадают с собственными состояниями относительно слабого взаимодействия[4]. Компоненты дублетов имеют слабый изоспин T^W=1/2. Проекции слабого изоспина на выделенную ось в соответствующем пространстве (T_3^W) равны $+1/2$ для нейтрино и верхних кварков и $-1/2$ для заряженных лептонов и нижних кварков. Обмен $W^{\pm}$-бозонами (заряженные токи) ассоциируется с повышающими и понижающими операторами: $\sigma_{\pm} = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$, а нейтральный ток, действующий на левые компоненты, с σ_3:

$$j_{\pm}^{\mu} = \frac{g_W}{\sqrt{2}}\bar{\varphi}_L\gamma^{\mu}\sigma_{\pm}\varphi_L, \qquad j_3^{\mu} = g_W\bar{\varphi}_L\gamma^{\mu}\sigma_3\varphi_L.$$

[3] Любой дираковский спинор можно представить в виде суммы $u = a_L u_L + a_R u_R = \frac{(1-\gamma^5)}{2}u_L + \frac{(1+\gamma^5)}{2}u_R$, где $u_{L,R}$ — левое и правое собственные состояния по киральности.

[4] Преобразование между собственными состояниями производится при помощи матрицы кваркового смешивания (матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы).

При этом правые киральные компоненты

$$e_R^-, \quad \mu_R^-, \quad \tau_R^-, \quad u_R, \quad c_R, \quad t_R, \quad d_R, \quad s_R, \quad b_R,$$

которым приписываются нулевые значения слабого изоспина и его проекции ($T^W = T_3^W = 0$), во взаимодействии с трехкомпонентным калибровочными полем W_μ не участвуют.

Нейтральные слабые токи для правых киральных компонент все же возможны в Стандартной модели[5]. Они возникают из-за симметрии уравнений относительно преобразования (6.11). Индекс Y в $U(1)_Y$ указывает, что симметрия работает в пространстве так называемого *слабого гиперзаряда*. В результате возникает нейтральное калибровочное поле B_μ. В соответствие физическим частицам фотону (γ) и Z^0-бозону ставится линейная комбинация поля B_μ и третьей компоненты поля W_μ:

$$A_\mu = +B_\mu \cos\theta_W + W_\mu^{(3)} \sin\theta_W, \tag{6.12}$$

$$Z_\mu = -B_\mu \sin\theta_W + W_\mu^{(3)} \cos\theta_W, \tag{6.13}$$

где θ_W — угол смешивания (*угол Вайнберга*).

Таким образом, в Стандартной модели взаимодействие фундаментальных фермионов зависит от констант связи и от квантовых чисел фермионов: электрического заряда (Q), проекции слабого изоспина (T_3^W) и слабого гиперзаряда (Y^W). Последние два квантовых числа различны для левой и правой киральных компонент. Значения этих квантовых чисел приведены в табл. 6.2. Как легко заметить, имеет место следующее соотношение между этими квантовыми числами:

$$Y^W = 2(Q - T_3^W).$$

Также заметим, что правосторонние нейтрино пока экспериментально не наблюдались.

[5] Вайнберг, Салам, Глэшоу.

Таблица 6.2: Квантовые числа, определяющие электрослабые взаимодействия фундаментальных фермионов Стандартной модели

Фермионы	Q	T^W	T_3^W	Y^W
$\nu_{e,L}$, $\nu_{\mu,L}$, $\nu_{\tau,L}$	0	1/2	+1/2	–1
e_L^-, μ_L^-, τ_L^-	–1	1/2	–1/2	–1
u_L, c_L, t_L	+2/3	1/2	+1/2	+1/3
d_L, s_L, b_L	–1/3	1/2	–1/2	+1/3
$\nu_{e,R}$, $\nu_{\mu,R}$, $\nu_{\tau,R}$	0	0	0	0
e_R^-, μ_R^-, τ_R^-	–1	0	0	–2
u_R, c_R, t_R	+2/3	0	0	+4/3
d_R, s_R, b_R	–1/3	0	0	–2/3

7 Примеры решения задач

Оценка размеров ядер

Бета-распады легких ядер изобар позволяют оценить их средние зарядовые радиусы, исходя из принципа изотопической симметрии взаимодействия нуклонов. Например, можно рассмотреть бета-распады ядер трития, для которых максимальная энергия бета-электрона составляет 18.6 кэВ. Если пренебречь разностью энергий атомных уровней и энергией ядра отдачи, кулоновская энергия протонов в ядре ^{3}He

$$V_{\mathrm{C}} = -\frac{\alpha}{R} = (M_{^3\mathrm{He}} - M_{^3\mathrm{H}}) - (m_n - m_p) = E^{\beta}_{\max} - (m_n - m_p - m_e).$$

Подставляя соответствующие значения и учитывая, что $1\,\text{фм}^{-1} = 197.327$ МэВ, получаем значение $R = 1.88$ фм. Экспериментальное значение составляет 1.96 фм.

Распады $K^{*0}(892)$-мезона

Particle Data Group приводит относительную парциальную ширину распада $K^{*0}(892)$-мезона на каон и пион, близкую к 100%. Какова относительная парциальная ширина распада по каналам $K^{*0}(892) \to K^+\pi^-$, $K^{*0}(892) \to K^-\pi^+$, $K^{*0}(892) \to K^0\pi^0$ и $K^{*0}(892) \to \bar{K}^0\pi^0$?

Во-первых, зададимся вопросом о том, под действием каких сил происходят данные распады. Полная ширина $K^{*0}(892)$-мезона составляет величину порядка 50 МэВ, а значит, распад идет под действием сильного взаимодействия, которое сохраняет странность. Распады $K^{*0}(892) \to K^-\pi^+$ и $K^{*0}(892) \to \bar{K}^0\pi^0$, очевидно, не сохраняют это квантовое число, поэтому их вероятности близки к нулю.

Доли двух оставшихся каналов можно получить, воспользовавшись изотопической симметрией. Изоспины и проекции изоспинов для $K^{*0}(892)$-, K^+-, K^0-, π^0- и π^0-мезонов приведены на рис. 5.3. Таким образом, относительная парциальная ширина для канала $K^{*0}(892) \to K^-\pi^+$ определяется квадратом коэффициента Клебша–Гордана: $C^{\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,1\,-1} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. Следовательно, вероят-

ность распасться по этому каналу близка к 2/3. Для канала с нейтральными частицами в конечном состоянии вероятность близка к 1/3.

Распады ρ- и ω-мезонов

Спин ρ-мезонов равен 1. Для ρ^0 наблюдаются распады $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$, а распады $\rho^0 \to \pi^0\pi^0$ не наблюдаются. Почему так происходит и чему равен изотопический спин ρ^0?

Для ответа на эти вопросы рассмотрим *обобщенный принцип Паули.* Симметрия волновой функции системы двух тождественных бозонов определяется множителем $(-1)^l(-1)^S$, где l — относительный орбитальный момент количества движения частиц, а S — суммарный спин системы частиц. Обобщенный принцип Паули применяют к обобщенно тождественным частицам — частицам, принадлежащим к одному изотопическому мультиплету. При этом к перестановке координат и спинов добавляют перестановку изотопических спинов. То есть множитель, определяющий симметрию волновой функции, записывается как $(-1)^l(-1)^S(-1)^T$. Для наблюдаемого распада $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$ пионы являются обобщенно тождественными частицами. Так как их спин, а значит, и спин их системы равны нулю, из закона сохранения момента количества движения следует $l = 1$. Чтобы соблюсти обобщенный принцип Паули, необходимо потребовать, чтобы изоспин ρ-мезона был равен единице. Эти мезоны ($\rho^{\pm,0}$) формируют изотопический триплет.

Рассмотрим распад системы с полным изоспином, равным 1, и его проекцией, равной 0 (состояние ρ^0), в систему двух одинаковых частиц с такими же характеристиками (π^0). Соответствующий коэффициент Клебша–Гордана C^{10}_{1010} равен нулю, то есть распад $\rho^0 \to \pi^0\pi^0$ наблюдаться не должен.

Распад $\omega \to \pi\pi$ запрещен, так как квантовые характеристики системы двух пионов, определяемые из законов сохранения момента количества движения и изотопического спина, противоречат требованиям симметрии волновой функции системы.

Тождественность частиц конечного состояния

Рассмотрим задачу определения вероятности распадов $f_0(980) \to \pi^0\pi^0$ и $f_0(980) \to \pi^+\pi^-$. Мезон $f_0(980)$ является изоскаляром с нулевой проекцией изоспина. С учетом коэффициентов Клебша–Гордана эта частица связана с изоспиновой комбинацией $(\pi^+\pi^- + \pi^-\pi^+ - \pi^0\pi^0)/\sqrt{3}$. Экспериментально наблюдаемая величина для интенсивностей заряженного и нейтрального

каналов распада может быть получена путем интегрирования по телесному углу. При этом интегрировании стоит учитывать *эффект тождественности частиц*.

- В случае электрически заряженных мезонов в конечном состоянии рассуждать можно следующим образом. Полная вероятность распада получается интегрированием по углу вылета π^+-мезона. Для угла θ существуют две амплитуды рождения заряженного пиона: одна — для π^+, а вторая — для π^-. Из первой следует, что под углом $(\theta + \pi)$ вылетит π^--мезон, а из второй, что под этим углом вылетит π^+. Таким образом, полная амплитуда вылета π^+ под углом θ равна $2/\sqrt{3}$. Интегрируя по телесному углу 4π, получаем, что общее число π^+-мезонов пропорционально $(4/3)4\pi$.

- Для нейтрального канала амплитуда вылета π^0 под углом θ также составляет $2/\sqrt{3}$. Однако для получения общего числа частиц интегрирование следует вести по телесному углу 2π, чтобы избежать двойного учета неразличимых состояний. При этом общее число нейтральных пионов пропорционально $(4/3)2\pi$.

Таким образом, соотношение счетов заряженного и нейтрального каналов распада $f_0(980)$ составляет два к одному, что соответствует вероятностям $2/3$ и $1/3$. Заметим, что принцип тождественности частиц должен учитываться при записи амплитуды распада, однако при экспериментальном анализе этот факт зачастую игнорируется[1].

Слабые распады

Рассмотрим задачу о соотношении вероятностей распадов по каналам $\Lambda \to p\pi^-$ и $\Lambda \to n\pi^0$ с точки зрения законов сохранения.

Λ-гиперон является изосинглетом ($T = 0,\ T_3 = 0$). В первом приближении распад описывается кварковым переходом $s \to u$, который изменяет изоспин на величину $1/2$. Таким образом, пион-нуклонная система должна находиться в состоянии с полным изоспином $1/2$. Из закона сохранения заряда проекция изоспина для конечного состояния должна быть $T_3^N + T_3^\pi = -1/2$. Поэтому соотношение вероятностей распада записывается как соотношение квадратов коэффициентов Клебша–Гордана:

$$\frac{B(\Lambda \to p\pi^-)}{B(\Lambda \to n\pi^0)} = \left(\frac{C^{\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,1\,-1}}{C^{\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\,1\,0}}\right)^2 = \frac{(-\sqrt{2/3})^2}{(\sqrt{1/3})^2} = 2.$$

[1] См. подробнее D.V. Bugg, Eur. Phys. J. C47 (2006) 4, `hep-ex/0603023`

Ядерные реакции

Рассмотрим задачу о соотношении сечений следующих процессов:

a) $pp \to d\pi^+$,

b) $pn \to d\pi^0$,

c) $nn \to d\pi^-$.

Изотопический спин дейтрона равен нулю, а пионы формируют изотриплет, поэтому конечные состояния характеризуются по изоспину как $|1\,1\rangle$, $|1\,0\rangle$ и $|1\,-1\rangle$ соответственно. Для процессов (a) и (c) начальные состояния по изоспину такие же, как для конечных. Поэтому с точки зрения изоспиновой симметрии их амплитуды, а значит, и сечения процессов одинаковы.

Для процесса (b) имеем (в соответствии с коэффициентами Клебша – Гордана)

$$|pn\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\,0\rangle + |0\,0\rangle).$$

В сильных взаимодействиях изотопический спин сохраняется, поэтому вклад в сечение для реакции $pn \to d\pi^0$ дает только рассеяние из $T = 0$. Отсюда соотношение амплитуд рассеяния

$$A_a : A_b : A_c = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1.$$

Поэтому соотношение сечений

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 2 : 1 : 2.$$

Пион-нуклонное рассеяние

Рассмотрим три процесса типа $\pi N \to \pi N$:

a) $\pi^+ p \to \pi^+ p$,

b) $\pi^- p \to \pi^- p$,

c) $\pi^- p \to \pi^0 n$.

Первые два относятся к реакции упругого рассеяния, а третий — к реакциям перезарядки. Так как речь идет о рассеянии частиц с $T = 1$ на частицах с $T = 1/2$, то возможный вклад в процесс рассеяния дают две амплитуды: $T = 3/2$ и $T = 1/2$. Обозначим эти амплитуды A_3 и A_1. Соответственно, коэффициенты Клебша – Гордана дают следующее разложение для амплитуд πN-процессов:

- π^+p: $|1\,1\rangle\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\right\rangle$,
- π^-p: $|1\,-1\rangle\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle$,
- π^0n: $|1\,0\rangle\left|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle$.

Исходя из этого, амплитуды переходов для интересующих нас процессов запишутся как

a) $A_a = A(\pi^+p \to \pi^+p) = A_3$,

b) $A_b = A(\pi^-p \to \pi^-p) = \frac{1}{3}A_3 + \frac{2}{3}A_1$,

c) $A_c = A(\pi^-p \to \pi^0n) = \frac{\sqrt{2}}{3}A_3 - \frac{\sqrt{2}}{3}A_1$.

Экспериментально известно, что вблизи порога рассеяние идет через возбуждение широких Δ-резонансов, то есть состояний с изоспином $T = 3/2$, поэтому $A_3 \gg A_1$. Соответственно, соотношение амплитуд процессов будет

$$A_a : A_b : A_c = 3A_3 : A_3 : \sqrt{2}A_3,$$

а соотношение сечений —

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 9 : 1 : 2. \tag{7.1}$$

То, что это соотношение выполняется, можно заключить, проанализировав экспериментальные данные о полных сечениях π^+p- и π^-p-рассеяния. В районе пика, соответствующего Δ-резонансам, оно действительно составляет 3 к 1, что следует из соотношений (7.1). Поведение сечений приведено на рис. 7.1.

Более подробные сведения о нуклон-нуклонных и пион-нуклонных взаимодействиях, а также о пионах как источнике ядерных сил можно получить, ознакомившись с книгой Т. Экриксона и В. Вайзе, ссылка на которую приведена в заключительной части этого учебного пособия.

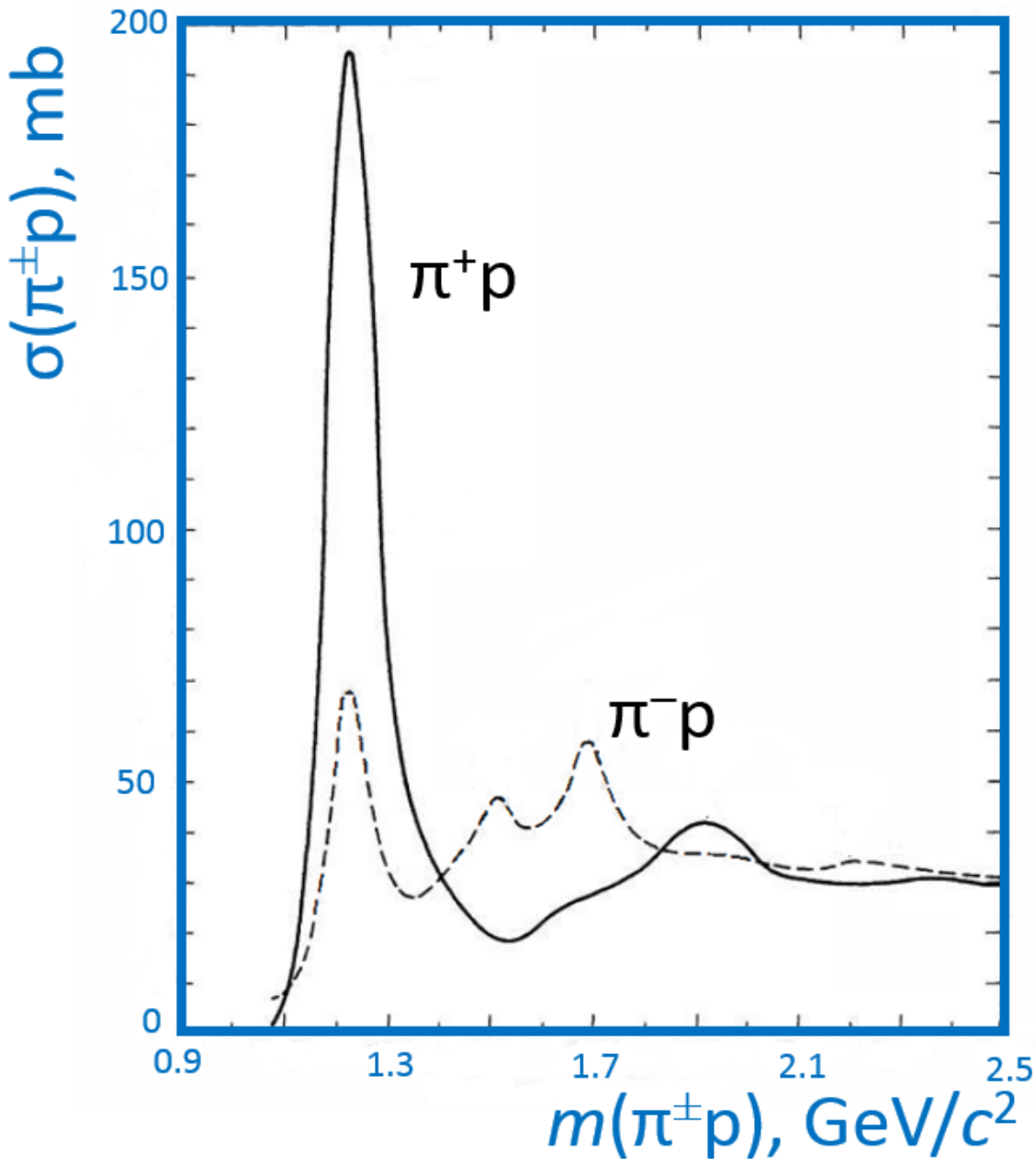

Рис. 7.1: Сечение пион-протонного рассеяния

8 Заключительные замечания

Как видно из представленного материала, понятие изотопического спина играет одну из ключевых ролей в физике элементарных частиц. Оно возникает везде, где проявляют себя симметрии групп $SU(2)$ и $SU(3)$. Именно на инвариантности относительно таких преобразований и построена Стандартная модель. При этом, как ни удивительно, сильный изоспин, являясь примером довольно точной симметрии, представляет собой довольно случайное свойство, возникающее вследствие приблизительного равенства масс кварков первого поколения. В отличие от сильного изоспина слабый и цветовой изоспины связаны с фундаментальными свойствами природы.

В качестве дальнейшего чтения рекомендуется следующая литература.

- Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К., *Квантовая теория углового момента*, Л.: Наука, 1975.
- Бор О., Моттельсон Б., *Структура атомного ядра*, Т. 1, М.: Мир, 1971.
- Браун Дж. Е., Джексон А. Д., *Нуклон-нуклонные взаимодействия*, М.: Атомиздат, 1979.
- Экриксон Т., Вайзе В., *Пионы и ядра*, М.: Наука, 1991.
- Окунь Л. Б., *Лептоны и кварки*, М.: ЛЕНАНД, 2019.
- Хелзен Ф., Мартин А., *Кварки и лептоны: Введение в физику частиц*, М.: Мир, 1987.
- Кейн Г., *Современная физика элементарных частиц*, М.: Мир, 1990.
- Thomson M., *Modern Particle Physics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

Автор выражает глубокую благодарность доценту кафедры физики атомного ядра и квантовой теории столкновений МГУ имени М. В. Ломоносова Н. В. Никитину, который весной 2020 года прочитал мини-курс лекций для студентов и аспирантов по теории сильного изоспина. Материал, изложенный в ходе этих лекций, подтолкнул автора к написанию данного учебного пособия и составил основу главы 3.

Также при подготовке учебного пособия использовались материалы лекций профессора кафедры общей ядерной физики МГУ имени М. В. Ломоносова Н. Г. Гончаровой.