

DIRECT EXTRACTION OF VECTOR-MESON- PRODUCTION AMPLITUDES FROM EXPERIMENTAL DATA

S.I. Manaenkov, PNPI of NRC <<KURCHATOV INSTITUTE>>,

LXXV International Conference “Nucleus-2025”,

Saint Petersburg, 1.07-6.07.2025

Contents

- Introduction
- Coherent vector-meson production on spinless targets
- Vector-meson production on nucleons: incoherent production on unpolarized targets
- Non-negativity of angular distribution of final particles in amplitude method
- Numerical calculation of helicity-amplitude ratios in terms of SDMEs
- Comparison of SDME and amplitude-method results
- Conclusions

Introduction

- Hard exclusive vector-meson electroproduction provides information both on the reaction mechanism and target structure.
- Production of vector mesons by heavy photons is one of two basic processes for extraction of Generalized Parton Distributions (GPDs) of nucleon and nucleus from data.
- Usual method of data processing is Spin-Density-Matrix-Element (SDME) method. The SDMEs are coefficients in angular distribution of final particles in vector-meson production by heavy photons. SDMEs are considered as free fit parameters.
- Any SDME can be expressed via amplitudes of process $\gamma^* + T \rightarrow V + T'$, where γ^* denotes virtual photon, T is a target nucleonic system (nucleus or nucleon), V is vector meson, T' denotes final state of nucleonic system.
- Direct extraction from the angular distribution of helicity-amplitude ratios, which are considered as free fit parameters, is called the amplitude method.

Introduction

- Some amplitudes contain linear contribution of GPDs. Not all helicity amplitudes of vector-meson production can be now calculated in theoretical models.
- Any SDME contains contributions of all amplitudes. Some SDMEs contain contributions of many amplitudes to the numerator of the formula for the SDME. In case of disagreement of model prediction for the SDME with data, it is difficult to establish which amplitude is predicted wrong in the model.
- Therefore to obtain GPDs, we are to extract all the amplitudes from data in the amplitude method, single out those amplitudes which can be calculated in the model and fit them using free parameters of GPD.

Coherent vector-meson production on spinless targets

Subprocesses: $e \rightarrow e' + \gamma^*$; $\gamma^*(\beta) + S \rightarrow V(\lambda) + S$: helicity amplitude $F_{\lambda\beta}$; $V = \rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.
 S is spinless nucleus retained intact; β and λ are helicities in center-of-mass system.

Amplitudes obey symmetry relations due to parity conservation $F_{-\lambda-\beta} = (-1)^{\lambda-\beta} F_{\lambda\beta}$.

Independent amplitudes: $F_{11}, F_{10}, F_{1-1}, F_{01}, F_{00}$.

Von-Neumann formula for spin-density matrix of vector meson $NR_{\lambda\nu} = \sum_{\alpha\beta} F_{\lambda\alpha} F_{\nu\beta}^* \rho_{\alpha\beta}$,
where ρ is spin-density matrix of virtual photon known from QED which depends on beam polarization
 P_b , N is normalization factor, $N = |F_{11}^2| + |F_{01}^2| + |F_{-11}^2| + \varepsilon \{ |F_{10}^2| + |F_{00}^2| + |F_{-10}^2| \}$,
and ε is flux ratio of longitudinally ($\beta=0$) to transversely polarized ($\beta=\pm 1$) virtual photons.

Angular distribution of decay pions ($\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$)

$$W(\Phi, \theta, \varphi) = \sum_{\lambda\nu} Y_{1\lambda}(\theta, \varphi) Y_{1\nu}^*(\theta, \varphi) R_{\lambda\nu}(\Phi, \varepsilon),$$

where $Y_{1\lambda}(\theta, \varphi)$ are spherical harmonics depending on polar θ and azimuthal φ angles of π^+ three-momentum in vector-meson-rest frame. Angular distribution $W(\Phi, \theta, \varphi)$ depends on Schilling-Wolf matrix elements $r_{\lambda\nu}^n$ being combinations of spin-density-matrix elements $R_{\lambda\nu}$ of vector meson.

Coherent vector-meson production on spinless targets

Formulas for SDMEs $r_{\lambda\nu}^n$ for unpolarized targets in terms of helicity amplitudes were obtained for nucleons by K. Schilling and G. Wolf in 1973 (Nucl. Phys., B61, 381) and are also valid for spinless targets. They look like $r_{\lambda\nu}^n = f_{\lambda\nu}^n (F_{\lambda\beta})$, where $f_{\lambda\nu}^n$ is a function of amplitudes and are basic equations for finding helicity amplitude ratios. Exact solutions of equations are found by author in paper SIM Phys. of Part. and Nucl. Letters 21 (2024) 34.

$$\frac{F_{00}}{F_{11}} = \frac{1}{\epsilon\sqrt{8}} \frac{\left(r_{00}^{04} + r_{00}^1\right)\left(\text{Im}\{r_{1-1}^2\} - r_{11}^1 - r_{1-1}^1 + i \cdot \text{Im}\{r_{1-1}^3\}\right)}{\left(r_{1-1}^1 - \text{Im}\{r_{1-1}^2\}\right)\left(\text{Im}\{r_{10}^6\} - i \cdot \text{Im}\{r_{10}^7\}\right)}$$
$$\frac{F_{1-1}}{F_{11}} = \frac{r_{11}^1 - i \cdot \text{Im}\{r_{1-1}^3\}}{r_{1-1}^1 - \text{Im}\{r_{1-1}^2\}}.$$
$$\frac{F_{10}}{F_{11}} = \frac{\text{Im}\{r_{1-1}^6\} - r_{1-1}^5 - i \cdot (r_{11}^8 - \text{Im}\{r_{1-1}^7\})}{\sqrt{2}(r_{1-1}^1 - \text{Im}\{r_{1-1}^2\})}.$$
$$\frac{F_{01}}{F_{11}} = \frac{2(\text{Im}\{r_{10}^2\} - i \cdot \text{Im}\{r_{10}^3\})}{r_{1-1}^1 - \text{Im}\{r_{1-1}^2\} + r_{11}^1 + i \cdot \text{Im}\{r_{1-1}^3\}}.$$

In order to obtain moduli and phase differences between helicity amplitudes, data on differential cross section $\frac{d\sigma}{dt}$ is to be added to the angular distribution.

Vector-meson production on nucleons: Incoherent production on unpolarized targets

Helicity amplitudes: Natural – Parity – Exchange (NPE) amplitudes $T_{\lambda \pm \frac{1}{2} \beta \pm \frac{1}{2}}$ correspond to exchanges

with pomeron, rho, omega, f_2 – reggeons etc. ($\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$ correspond to nucleon helicity).

Unnatural-Parity-Exchange (UPE) amplitudes $U_{\lambda \pm \frac{1}{2} \beta \pm \frac{1}{2}}$ correspond to pion and a_1 exchanges etc.

- There is no interference of contributions of NPE and UPE amplitudes to Schilling-Wolf spin-density-matrix elements for unpolarized nucleus targets. This means that if ratio $U_{\lambda \pm \frac{1}{2} \beta \pm \frac{1}{2}} / T_{\lambda \pm \frac{1}{2} \beta \pm \frac{1}{2}} \sim \Upsilon_U$ is small parameter, then contribution to SDMEs is very small $\sim \Upsilon_U^2$.
- There is no interference of contributions to Schilling-Wolf SDMEs of nucleon-spin-flip and non-spin-flip helicity amplitudes. If ratio $T_{\lambda \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2}} / T_{\lambda \frac{1}{2} \beta \frac{1}{2}} \sim \Upsilon_{SF}$ is small parameter, then fractional contribution of spin-flip amplitudes to SDMEs is proportional to square of small parameter $\sim \Upsilon_{SF}^2$.
- Main amplitudes : $F_{11}, F_{10}, F_{1-1}, F_{01}, F_{00} \rightarrow T_{1\frac{1}{2}1\frac{1}{2}}, T_{1\frac{1}{2}0\frac{1}{2}}, T_{1\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}}, T_{0\frac{1}{2}1\frac{1}{2}}, T_{0\frac{1}{2}0\frac{1}{2}} \cdot U_{\lambda \pm \frac{1}{2} \beta \pm \frac{1}{2}} \equiv 0$. Dominant helicity-amplitude ratio is $T_{1\frac{1}{2}1\frac{1}{2}} / T_{0\frac{1}{2}0\frac{1}{2}}$.
The largest amplitude ratio violating SCHC (S-Channel Helicity Conservation) is $T_{0\frac{1}{2}1\frac{1}{2}} / T_{0\frac{1}{2}0\frac{1}{2}}$.

Non-negativity of angular distribution of final particles for spinless targets

- In SDME method, SDMEs should obey some inequalities to guarantee that angular distribution $W(\Phi,\theta,\varphi)$ is not negative.

This problem is discussed in details in paper by M. Gavrilova, O. Teryaev, Phys. Rev. D99 (2019) 076013.

- In amplitude method for nonzero amplitudes, $W(\Phi,\theta,\varphi) \geq 0$ (SIM, Phys. Atom. Nucl. 87 (2024) 505).

Eigenvalues of spin-density matrix of virtual photon: $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3 = 0$, where

$$\eta_1 = (1 + \varepsilon + \sqrt{g})/2, \quad \eta_2 = (1 + \varepsilon - \sqrt{g})/2, \quad \eta_3 = 0, \text{ with } g = 4\varepsilon^2 + P_b^2 (1 - \varepsilon)(1 + 3\varepsilon) > 0 \text{ for } 0 < \varepsilon < 1.$$

It is easy to show that $\eta_1 > \eta_2 > 0, \eta_3 = 0$ if $0 < \varepsilon < 1, P_b^2 < 1$.

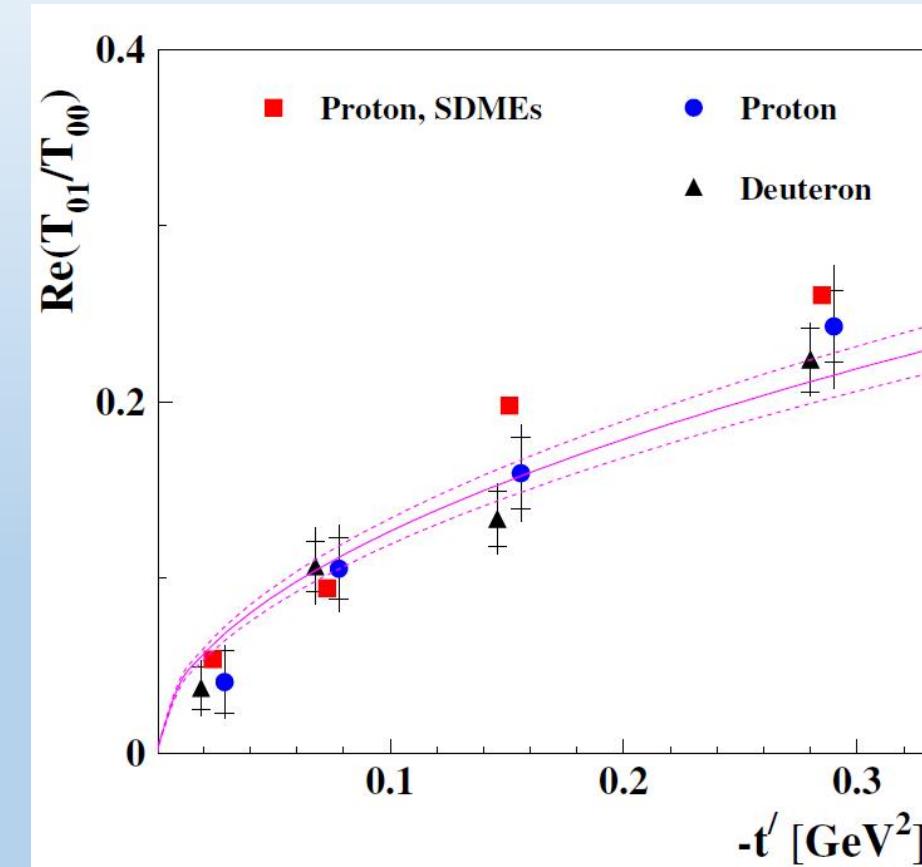
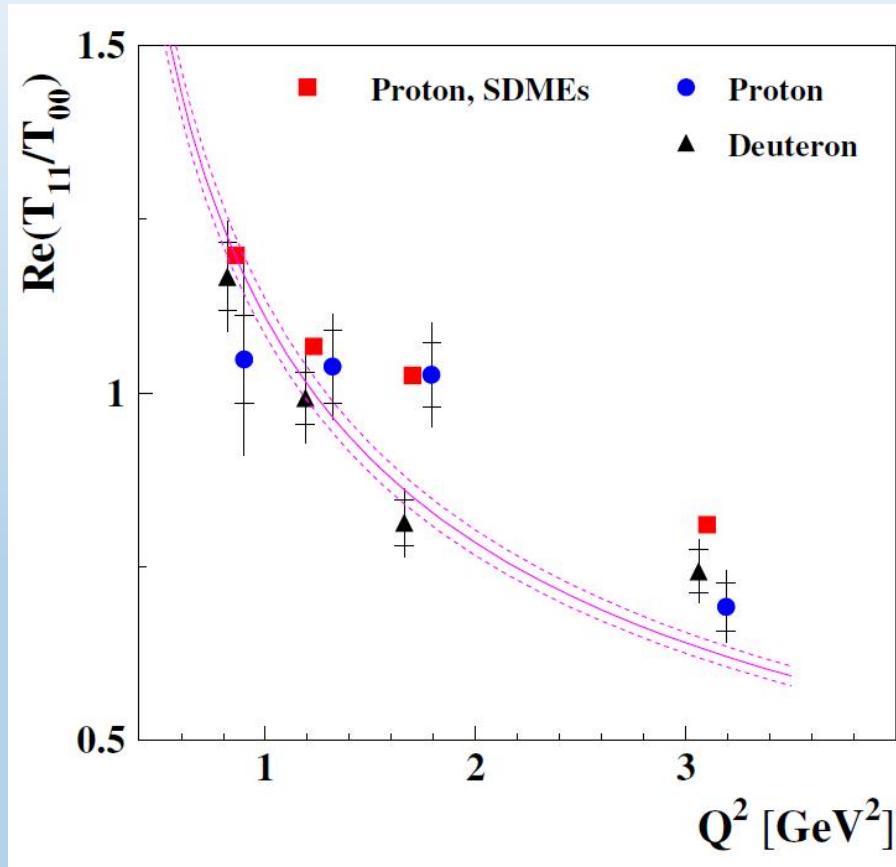
3. If X_n^α are three eigenvectors for $n=1, 2, 3$ of virtual-photon spin-density matrix, then

$$\rho_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^3 \eta_n X_n^\alpha (X_n^\beta)^*,$$

$$NW(\Phi,\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^3 \eta_n |G_n|^2 \geq 0, \text{ where } G_n = \sum_{\lambda, \alpha} Y_{1\lambda}(\theta, \varphi) F_{\lambda\alpha} X_n^\alpha(\Phi).$$

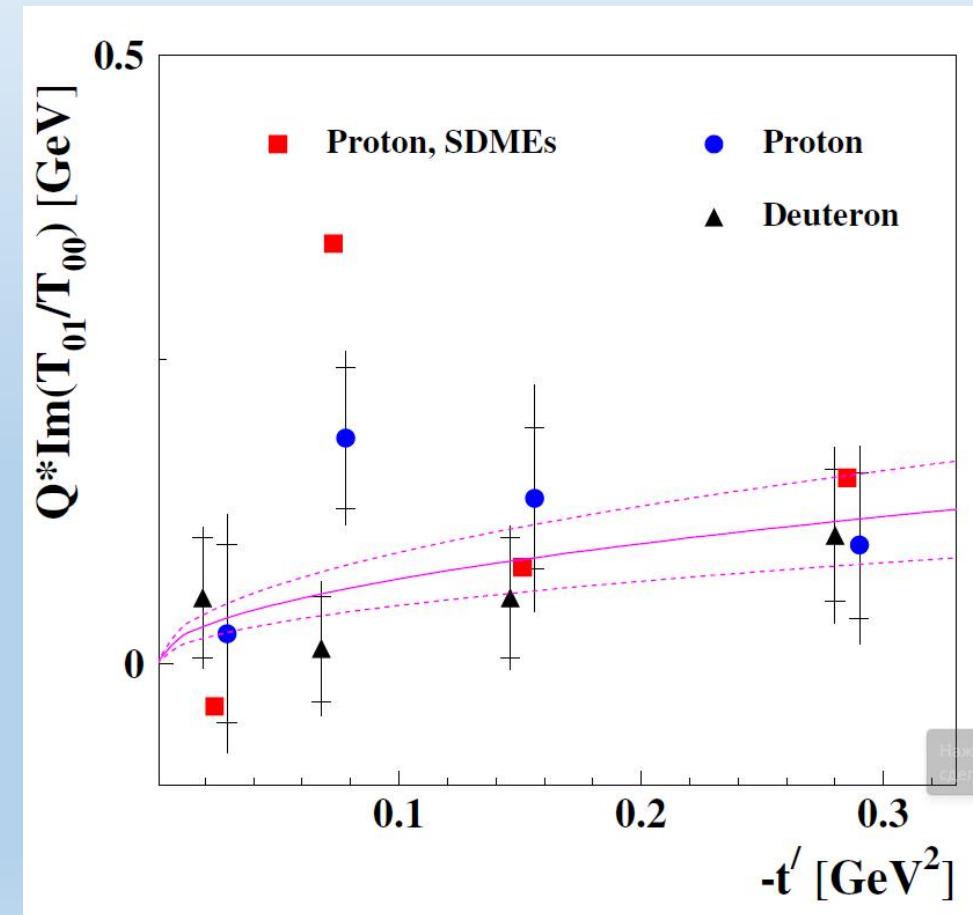
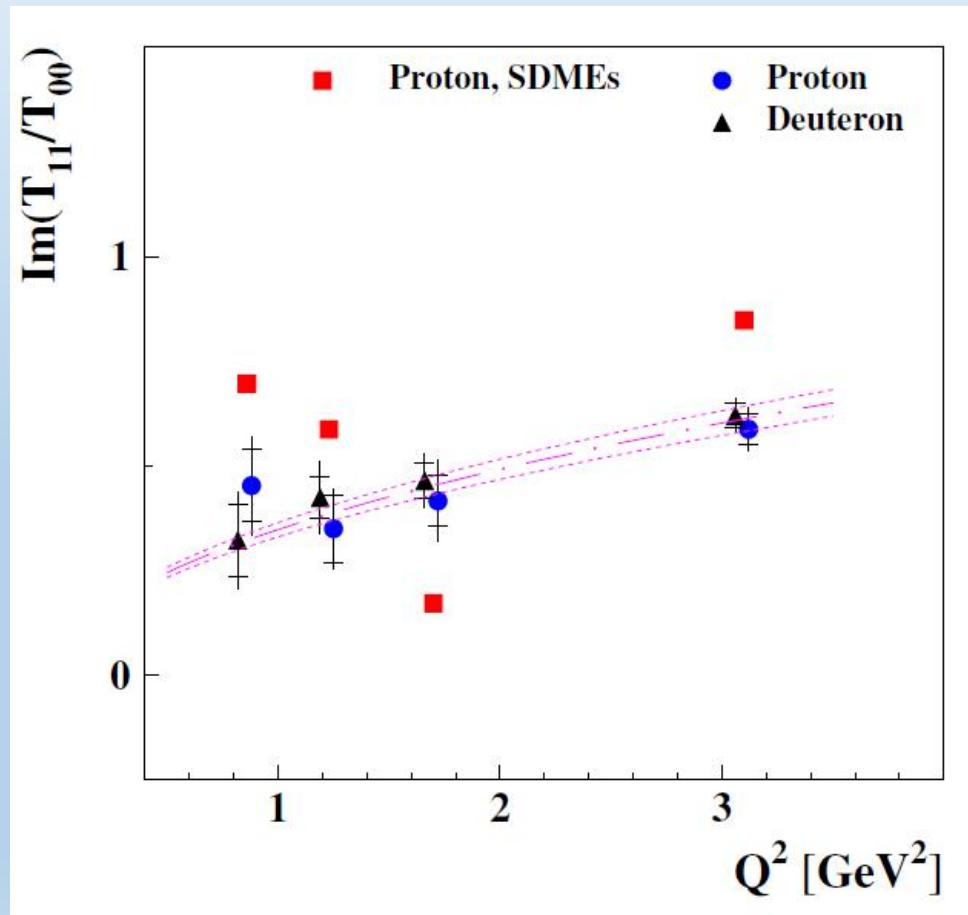
Since $N > 0$ and NW is non-negative, the angular distribution W is non-negative in amplitude method for any non-zero helicity amplitudes of vector-meson production on spinless nuclei. Non-negativity of the angular distributions of final particles can be proved for production on nucleons in analogous way.

Numerical Calculation of Helicity Amplitude Ratios in Terms of SDMEs

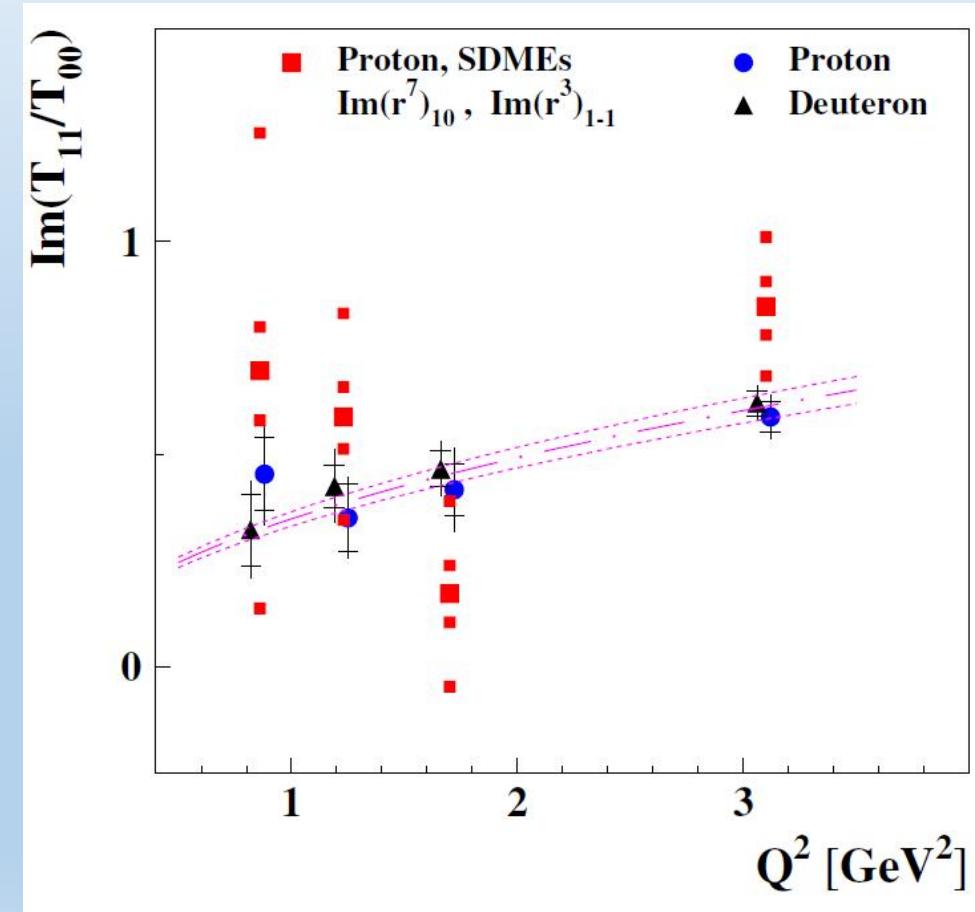
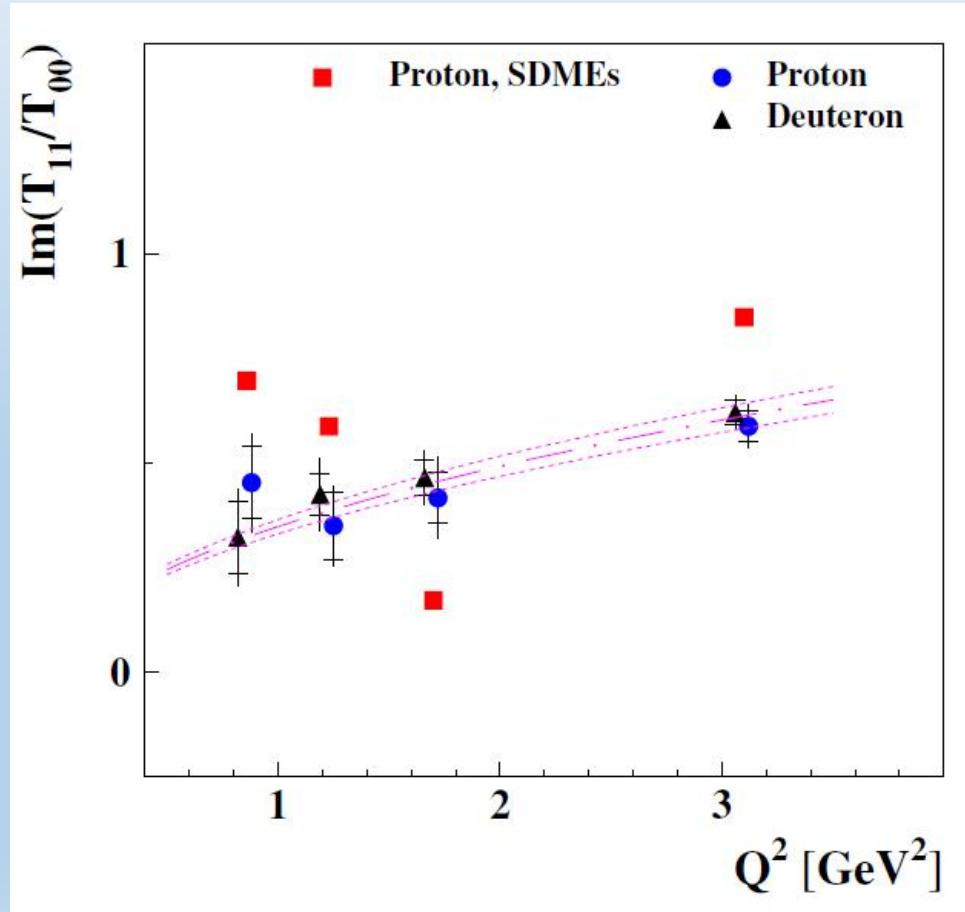


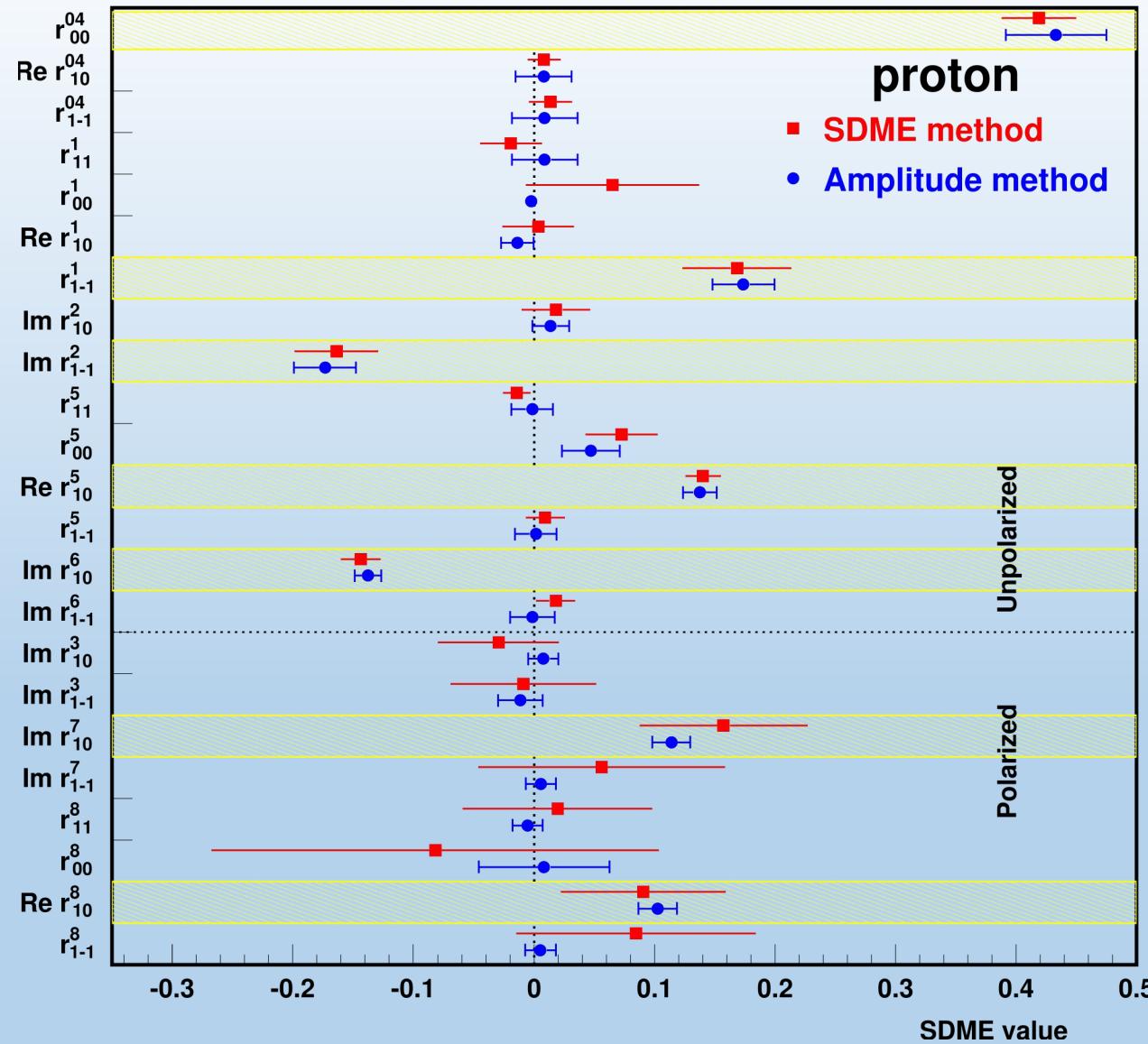
Circles and triangles are results of amplitude analysis of HERMES data in EPJ C71, 1609 (2011). Squares obtained with formulas from PEPAN Lett. 21, 34 (2024) and SDMEs are from EPJ C62, 659 (2009).

Numerical Calculations of Helicity Amplitude Ratios in Terms SDMEs



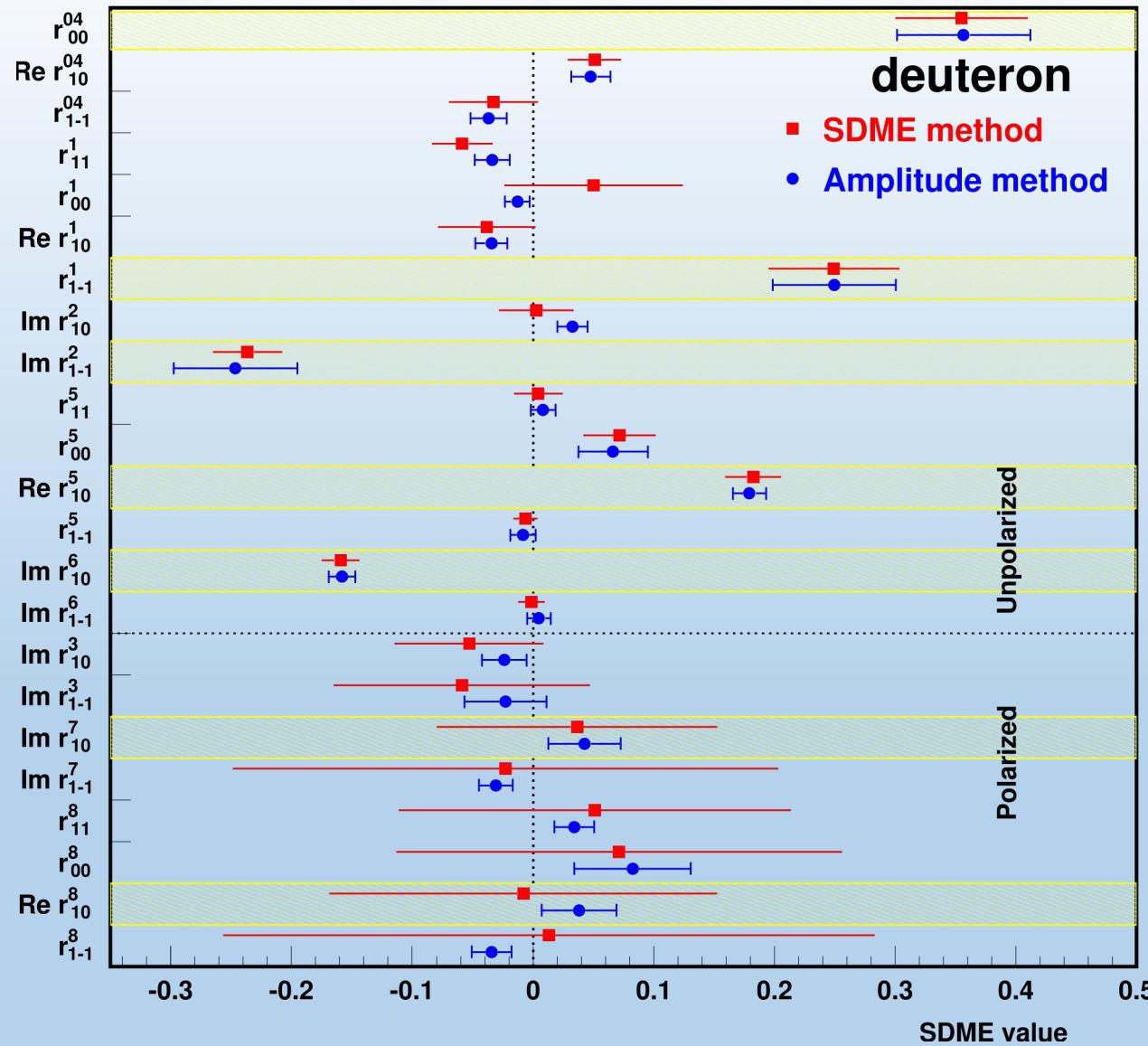
Numerical Calculation of Helicity Amplitude Ratios in Terms of SDMEs





$Q^2=3.0 \text{ GeV}^2 ; v_T^2=0.019 \text{ GeV}^2.$

HERMES, EPJ C71 (2011) 1609.



$Q^2=1.2 \text{ GeV}^2 ; v_T^2=0.145 \text{ GeV}^2$

HERMES EPJ C71 (2011) 1609.

Conclusions

- It is shown that amplitude method is the best which permits to extract generalized parton distributions from data on vector-meson electroproduction.
- For any set of non-zero helicity amplitudes, angular distribution of final particles is non-negative.
- There are exact formulas for amplitude ratios in terms of SDMEs for spinless targets.
- The formulas become approximate for meson electroproduction on nucleons. They have reasonable accuracy when unnatural-parity-exchange and nucleon-spin-flip amplitudes are much smaller than natural-parity-exchange amplitudes without nucleon-spin flip.
- Accuracy of imaginary parts of amplitude ratios predicted approximate formulas under discussion is worse than real part accuracy. This is due to worse statistical accuracy of polarized SDMEs compared to unpolarized ones. Amplitude method provides imaginary parts of amplitude ratios with reasonable accuracy since they contribute to all SDMEs.
- Statistical accuracy of polarized SDMEs should be increased to extract reliably generalized parton distributions.

Поляризационные эффекты в эксклюзивном рождении адронов в глубоконеупругом рассеянии электронов и позитронов на ядрах

- Диссертация состоит из Введения, 9 глав, Заключения и Приложений. Полный объём --333 стр., 48 рисунков и 14 таблиц. Список литературы содержит 168 работ.
- Во Введении указана цель исследования, его актуальность, перечислены основные положения, выносимые на защиту. Перечислены основные международные конференции, где докладывались основные результаты данной работы.

Диссертация

- Введение = автореферат.
- Глава 1. Статус проблемы спиновой структуры нуклона.
- Глава 2. Кинематика электророждения векторного мезона.
- Глава 3. Спиральные амплитуды и их свойства. Спиновые матрицы плотности фотона, нуклона, векторного мезона.
- Глава 4. Связь матрицы плотности векторного мезона с угловым распределением частиц в выходном канале. Приближение SCHC (S-Channel Helicity Conservation). Формулы для отношения R сечений рождения векторного мезона продольным и поперечным виртуальным фотоном. Вклад UPE (Unnatural Parity Exchange) амплитуд в SDMEs (Spin Density Matrix Elements).

Диссертация

- Глава 5. Метод амплитуд. Доказательство неотрицательности углового распределения частиц в выходном канале. Выражения для отношений амплитуд через SDMEs. Точная и приближённая формулы для R. Соотношения связи для SDMEs. Частные случаи: фиксированный азимутальный угол, нулевой переданный нуклону импульс, малые нарушения SCHC-приближения. Роль продольной и поперечной поляризации мишени.
- Глава 6. Рождение р-мезона в модели Рыскина. Амплитуды перерассеяния рассчитаны в феноменологии Редже. Сравнение расчетов с мировыми данными.

Диссертация

- Глава 7. Анализ данных ГЕРМЕС на неполяризованных протонной и дейtronной мишенях методом спиновой матрицы плотности векторного мезона (SDME-метод). Биновый и безбиновый методы максимума правдоподобия. Иерархия систематических ошибок. Причины низкой точности поляризационных SDMEs. Расчет разности фаз доминирующих амплитуд по новым формулам. Оценка вклада UPE-амплитуд для ρ и ω -мезонов. Установление иерархии амплитуд для ρ и ω -мезонов. Роль однопионного обмена в модели Голосковова-Кроля. Изучение азимутальной зависимости асимметрии в рождении ω -мезона на поперечно поляризованном протоне. Определение знака формфактора перехода ω в пион с испусканием фотона. Сравнение результатов коллаборации ГЕРМЕС с результатами коллабораций CLAS и COMPASS.

Диссертация

- Глава 8. Метод изучения поляризационных данных с помощью случайной переменной ξ . Вывод формул для математического ожидания и дисперсии. Извлечение поляризации Л-гиперона из распада на протон и пион, малочувствительное к функции отклика детектора. Анализ Монте Карло “эксперимента”.
- Глава 9. Анализ данных ГЕРМЕС методом амплитуд. Сравнение SDMEs, полученных SDME-методом и рассчитанных в амплитудном методе. Сравнение кинематических зависимостей отношений амплитуд (OA) с предсказаниями в пертурбативной КХД. Сравнение результатов ГЕРМЕС и Н1 коллабораций для OA.

Диссертация

- Вторая часть главы 9. Амплитудный анализ рождения ρ -мезона на поперечно поляризованном протоне. Получены оценки малых амплитуд с переворотом спина протона. Их малость оправдывает пренебрежение эффектом переворота спина протона в анализе данных на неполяризованных мишенях. Рассчитаны все SDMEs. Статистические ошибки рассчитанных поляризационных SDMEs меньше ошибок этих SDMEs, полученных SDME-методом. Сравнение полученных ОА с вычисленными в модели Голосковова-Кроля показало необходимость добавления амплитуд однопаронного обмена и позволило получить знак пр-формфактора.

Положения, выносимые на защиту

1. Выполнен анализ данных ГЕРМЕС по рождению р-мезона SDME-методом и новым амплитудным методом. Сравнение их показывает преимущества второго метода.
2. SDME-анализ данных ГЕРМЕС по рождению р-мезона показал нарушение SCHC-приближения для r^5_{-00} на уровне 8,7 стандартных отклонений полной ошибки для протона и 10,4 σ для дейтрана. UPE-сигнал обнаружен на уровне 3,5 σ.
3. Получены новые формулы для синуса и косинуса разности фаз важнейших NPE и UPE-амплитуд, которые позволили найти не только модули, но и знаки разности фаз. Возможность применить эти формулы появилась, потому что ГЕРМЕС впервые использовал продольно поляризованный пучок.

Положения, выносимые на защиту

4. SDME-методом показано, что вклад UPE-амплитуд доминирует в рождении ω -мезона в эксперименте ГЕРМЕС. Найдены параметры формфактора в амплитудах однопионного обмена в этом процессе, которые необходимо добавить к амплитудам модели Голосковова-Кроля.
5. Установлена иерархия амплитуд рождения ρ и ω -мезонов в эксперименте ГЕРМЕС в SDME-методе.
6. Показана неотрицательность углового распределения частиц от распада векторного мезона в амплитудном подходе, что важно для использования метода максимума правдоподобия в анализе данных.

Положения, выносимые на защиту

7. В методе амплитуд подтверждена иерархия амплитуд, установленная SDME-методом. Проведено сравнение кинематической зависимости отношений амплитуд с предсказаниями пертурбативной КХД. В некоторых случаях получены указания на возможные отклонения полученных отношений от теоретических предсказаний. Это означает необходимость тщательного изучения вопроса о границе области применимости асимптотического поведения амплитуд и о роли перерассеяний кварк-антикварковой пары на ядре-мишени.

Положения, выносимые на защиту

8. Получены формулы, выражающие отношения амплитуд через SDMEs для рождения векторного мезона на бесспиновой мишени. Эти формулы применимы для рождения на неполяризованном нуклоне, если все UPE-амплитуды и амплитуды с переворотом спина нуклона пренебрежимо малы.
9. Получены новые формулы для отношения R сечений рождения фотоном, поляризованным продольно и поперечно: точная -- для бесспиновой мишени, приближённая -- для нуклона.
10. Проведены расчёты SDMEs и R в модели Рыскина с описанием перерассеяний в феноменологии Редже. Достигнуто разумное описание мировых данных при высоких энергиях и $Q^2 < 4 \text{ GeV}^2$.

Положения, выносимые на защиту.

11. Предложен метод извлечения асимметрий из данных опыта, основанный на случайной переменной ξ , не использующий Монте Карло описание свойств детектора. Показано, что математическое ожидание ξ равняется физической асимметрии. Получена формула для дисперсии ξ , отличающаяся от стандартной при малых числах полезных событий.