# Неравенства Белла и их нарушение


**Н. В. Никитин**

**МГУ имени М. В. Ломоносова, Физический факультет**

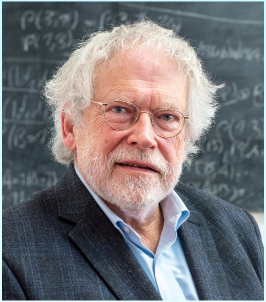
**Кафедра физики атомного ядра и квантовой теории столкновений**

**Семинар ОФВЭ ПИЯФ**

**Санкт-Петербург, Россия** **21 марта 2023**

# Содержание

# Введение

**4 октября 2022 года было объявлено, что лауреатами Нобелевской премии по физике 2022 года стали Ален Аспе (Alain Aspect, 15.06.1947), Джон Френсис Клаузер (John F. Clauser, 01.12.1942) и Антон Цайлингер (Anton Zeilinger, 20.05.1945) за эксперименты с запутанными фотонами, которые позволили установить нарушение неравенств Белла, а также за вклад в развитие квантовой информатики.**

# Shut up and contemplate!

**Появившаяся в первой четверти XX века квантовая парадигма содержит утверждения, противоречащие классическому «здравому смыслу» и представлениям СТО. Возникают вопросы.**

1. **Не все наблюдаемые, которые характеризуют состояние физической системы, могут быть совместно измерены любым классическим измерительным прибором.**
   **Вопрос: существуют ли эти наблюдаемые совместно, или физические свойства квантовой системы зависят от выбора процедуры измерения и конструкции классического измерительного прибора?**
2. **Вероятностные или статистические предсказания НКМ – это фундаментальное свойство природы микромира или следствие «грубости» классических измерительных приборов?**
3. **НКМ нелокальна на микроскопическом уровне (например, для запутанных состояний) и локальна на макроскопическом. Можно ли проверить это экспериментально?**

**Наконец, можно ли «улучшить» квантовую парадигму так, чтобы свести ее к классической?**

# Концепция локального реализма и NSC

**Для сведения квантовой парадигмы к классической необходимо сформулировать, каким условиям должны удовлетворять физические системы в классической парадигме. Такие условия были предложены в работе A.Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen "Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?", Phys. Rev.47, p.777 (1935). Этот набор, получивший название концепции Локального реализма ("LR"), включает в себя три принципа:**

**1) Классический реализм ("CR"): совокупность всех характеристик любой физической системы существует совместно и независимо от наблюдателя. При этом может оказаться так, что наблюдатель не в состоянии совместно измерить всю совокупность таких характеристик любым классическим измерительным прибором.**

**Принцип CR означает, что если квантовая система обладает наблюдаемыми $A$, $B$ и так далее, то существуют совместные вероятности того, что квантовая система имеет значение спектра $a_\alpha$ наблюдаемой $A$, значение спектра $b_\beta$ наблюдаемой $B$ и так далее, то есть существуют совместные вероятности**

$$0 \leq w(a_\alpha,\, b_\beta \,\ldots \,|\, A,\, B,\, \ldots) \leq 1.$$

**2) Локальность: если два измерения выполнены классическими измерительными приборами $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ в двух разных точках 4-мерного пространства–времени, которые разделены между собой пространственноподобным интервалом в течение всего времени измерения, то состояние классического прибора $D^{(1)}$никак не влияет на показания классического прибора $D^{(2)}$. И наоборот.**

**В силу этого условия "локальный экспериментатор" подсистемы "$(1)$", который измеряет спектр наблюдаемой $A^{(1)}$, ничего не знает о результатах измерения спектра наблюдаемой $B^{(2)}$. Поэтому он должен просуммировать по всем значениям спектра наблюдаемой $B^{(2)}$. При этом принцип локальности требует исключить влияние состояния классического прибора $D_B^{(2)}$ на результаты измерения наблюдаемой $A^{(1)}$ в подсистеме "$(1)$". Это приводит к следующему равенству:**

$$\sum_{\beta} w\left(a_{\alpha}^{(1)},\, b_{\beta}^{(2)} \,|\, D_A^{(1)},\, D_B^{(2)}\right) = w\left(a_{\alpha}^{(1)} \,|\, D_A^{(1)}\right).$$

**Это соотношение носит название No-signaling condition (NS–условие).**

Если одна из подсистем имеет две и более совместно неизмеримые наблюдаемые, операции с совместными вероятностями требуют дополнительного предположения, чтобы не вступать в противоречие с требованием локальности. Таким предположением может служить либо требование того, чтобы измерение не разрушало состояние одной из подсистем, либо принятие "расширенного" NS – условия:

$$\sum_{\gamma} w\left(a_{\alpha}^{(1)},\, c_{\gamma}^{(1)},\, b_{\beta}^{(2)} \,|\, D_A^{(1)},\, D_C^{(1)},\, D_B^{(2)}\right) = w\left(a_{\alpha}^{(1)},\, b_{\beta}^{(2)} \,|\, D_A^{(1)},\, D_B^{(2)}\right);$$

$$\sum_{\alpha} w\left(a_{\alpha}^{(1)},\, b_{\beta}^{(2)} \,|\, D_A^{(1)},\, D_B^{(2)}\right) = w\left(b_{\beta}^{(2)} \,|\, D_B^{(2)}\right).$$

3) **Свобода воли**: состояние физической системы в любой момент времени не может со стопроцентной вероятностью влиять на выбор экспериментатором целей эксперимента над физической системой в последующие моменты времени и набора классических приборов для достижения поставленных целей.

То есть каждая последующая серия измерений статистически независима от предыдущей, что позволяет использовать обычные методы статистической обработки и анализа экспериментальных данных.

# Сумма Белла. Неравенство Белла

**Опр.: дихотомной наблюдаемой называется такая наблюдаемая $F$, спектр которой принимает всего два значения: $+1$ и $-1$.**

**Предположим, что концепция LR справедлива для всех физических систем. Тогда рассмотрим составную физическую систему, состоящую из двух подсистем $(1)$ и $(2)$. В подсистеме $(1)$ – две дихотомные переменные $F$ и $F'$. В подсистеме $(2)$ – две дихотомные переменные $G$ и $G'$.**

**Пусть $f_i = (-1)^i$, где $i = \{0,\, 1\}$ – элемент спектра дихотомной наблюдаемой $F$. Аналогично введем $f'_j = (-1)^j$, $g_k = (-1)^k$ и $g'_m = (-1)^m$ – элементы спектров дихотомных наблюдаемых $F'$, $G$ и $G'$ соответственно, где $\{j,\, k,\, m\} = \{0,\, 1\}$.**

**Пусть между подсистемами $(1)$ и $(2)$ существует корреляция, тогда**

$$\langle\, F\, G\,\rangle \;=\; \sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} f_i\, g_k\, w\Big(f_i,\, g_k \,|\, F,\, G\Big) \neq \langle\, F\,\rangle\;\langle\, G\,\rangle,$$

**где**

$$\langle\, F\,\rangle \;=\; \sum_{i=0}^{1} f_i\, w\Big(f_i \,|\, F\Big).$$

В силу NS-условия или принципа Локальности,

$$\sum_{k=0}^{1} w\Big(f_i,\, g_k \,|\, F,\, G\Big) \;=\; w\Big(f_i \,|\, F\Big).$$

Согласно принципам CR и Свободы воли, для каждого набора $\{f_i,\, f'_j,\, g_k,\, g'_m\}$ значений спектров наблюдаемых $F$, $F'$, $G$ и $G'$ должна существовать вероятность

$$0 \;\le w\Big(f_i,\, f'_j,\, g_k,\, g'_m \,|\, F,\, F',\, G,\, G'\Big) = \; w_{ijkm} \;\le\; 1$$

совместного существования такого набора. Если воспользоваться "расширенным" NS – условием, то, например,

$$w\Big(f_i,\, g_k \,|\, F,\, G\Big) \;\equiv\; w_{ik} \;=\; \sum_{j=0}^{1} \sum_{m=0}^{1} w_{ijkm}.$$

Тогда коррелятор $\langle\, F\, G\,\rangle$ можно записать как:

$$\langle\, F\, G\,\rangle \;=\; \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} \sum_{m=0}^{1} f_i\, g_k\, w_{ijkm}.$$

**В предположении концепции LR запишем сумму Белла**

$$\langle\, S \,\rangle \;=\; \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{1} S_{ijkm}\, w_{ijkm},$$

**где**

$$S_{ijkm} = ({f'}_j + f_i)\, g_k + ({f'}_j - f_i)\, {g'}_m.$$

**Легко проверить, что для любых комбинаций** $\{i, j, k, m\} = \{0,\, 1\}$ **справедливо равенство:** $S_{ijkm} \;=\; \pm 2$**, откуда следует двойное неравенство**

$$-2 \;\leq\; \langle\, S \,\rangle \;\leq\; +2.$$

**Обычно это неравенство записывают в иной форме:**

$$\Big|\, \langle\, F\; G \,\rangle - \langle\, F\; G' \,\rangle + \langle\, F'\; G \,\rangle + \langle\, F'\; G' \,\rangle \,\Big| \;\leq\; 2.$$

**То есть в предположении справедливости концепции LR модуль суммы Белла не превосходит двойки. Это утверждение обычно называют неравенством Белла–Клаузера–Хорна–Шимони–Хольта или BCHSH-неравенством. Оно впервые было получено в работе J.F .Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, "Proposed experiment to test local hidden variable theories", Phys. Rev. Lett. 23, p.880 (1969).**

# Вывод сильных BCHSH–неравенств при помощи концепции локальных скрытых параметров

**Дадим вывод неравенства, более сильного, чем BCHSH–неравенство. В параграфе "Сумма Белла. Неравенство Белла" мы не задумывались, какой механизм может обеспечивать существование четверных $w\left(f_i,\, f_j',\, g_k,\, g_m' \,|\, F,\, F',\, G,\, G'\right)$, тройных и так далее совместных вероятностей.**

**Предположим, что скрытые параметры $\lambda$ полностью определяют состояние физической системы и обеспечивают существование любых неотрицательных совместных/условных вероятностей в рамках концепции LR.**

**Опр.: скрытые параметры $\lambda$, удовлетворяющие принципу Локальности, называются локальными скрытыми параметрами. Скрытые параметры могут относиться как к каждой из подсистем физической системы, так и к классическим измерительным приборам или окружению. В последнем случае они называются контекстуально зависимыми скрытыми параметрами.**

Тогда можно ввести вероятность измерения конкретного значения $f_i$ наблюдаемой $F$ при данном наборе скрытых параметров $\lambda$ как условную вероятность $w\,(f_i\,|\,F,\,\lambda)$. В силу принципа **Локальности**

$$w\,(f_i,\,g_k\,|\,F,\,G,\,\lambda) = w\,(f_i\,|\,F,\,\lambda)\;w\,(g_k\,|\,G,\,\lambda).$$

Согласно принципу **Свободы воли** экспериментаторы могут выбирать настройки классических измерительных приборов вне зависимости от текущего набора скрытых параметров $\lambda$. Тогда

$$w\,(f_i,\,g_k\,|\,F,\,G) = \int d\lambda\;w(\lambda)\;w\,(f_i,\,g_k\,|\,F,\,G,\,\lambda) =$$
$$= \int d\lambda\;w(\lambda)\,w\,(f_i\,|\,F,\,\lambda)\;w\,(g_k\,|\,G,\,\lambda),$$

где $w(\lambda)$ – нормированная на единицу функция распределения скрытых параметров: $1 = \int d\lambda\, w(\lambda)$, не зависящая от выбора наблюдаемых, над которыми выполняется измерение. То есть:

$$w(\lambda) = w(\lambda\,|\,F,\,G) = w(\lambda\,|\,F,\,G') = w(\lambda\,|\,F',\,G) = w(\lambda\,|\,F',\,G').$$

С учетом всего вышесказанного для $\langle\, F\, G\,\rangle$ можем записать

$$\langle\, F\, G\,\rangle \;=\; \sum_{i,\,k} f_i\, g_k\, w\,(f_i,\, g_k\,|\, F,\, G) \;=$$

$$= \int d\lambda\;\, w(\lambda)\, \Big(\sum_i\, f_i\, w\,(f_i\,|\, F,\, \lambda)\Big) \Big(\sum_k\, g_k\, w\,(g_k\,|\, G,\, \lambda)\Big) =$$

$$= \int\, d\lambda\, w(\lambda)\; \langle\, F\,\rangle_\lambda\; \langle\, G\,\rangle_\lambda.$$

Таким образом, $\langle\, F\, G\,\rangle \;=\; \int\, d\lambda\, w(\lambda)\; \langle\, F\,\rangle_\lambda\; \langle\, G\,\rangle_\lambda$.

Далее при доказательстве мы будем использовать следующий факт: поскольку $F$, $F'$, $G$ и $G'$ – дихотомные переменные, то

$$\big|\langle\, F\,\rangle_\lambda\big| \,\le\, 1, \quad \big|\langle\, F'\,\rangle_\lambda\big| \,\le\, 1, \quad \big|\langle\, G\,\rangle_\lambda\big| \,\le\, 1 \;\text{ и }\; \big|\langle\, G'\,\rangle_\lambda\big| \,\le\, 1.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\big|1 \pm \langle\, F'\,\rangle_\lambda \langle\, G\,\rangle_\lambda\big| \;=\; 1 \pm \langle\, F'\,\rangle_\lambda \langle\, G\,\rangle_\lambda$$

и

$$\big|1 \pm \langle\, F'\,\rangle_\lambda \langle\, G'\,\rangle_\lambda\big| \;=\; 1 \pm \langle\, F'\,\rangle_\lambda \langle\, G'\,\rangle_\lambda.$$

Наконец, при доказательстве нам понадобятся очевидные неравенства: $|a\, \pm\, b| \,\le\, |a| \,+\, |b|$ и $0 \,\le\, a \pm b \;\Rightarrow\; |b| \,\le\, a$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\Big| \langle\, F\, G \,\rangle - \langle\, F\, G' \,\rangle \Big| &= \left| \int d\lambda\, w(\lambda)\, \left( \langle\, F \,\rangle_\lambda \langle\, G \,\rangle_\lambda - \langle\, F \,\rangle_\lambda \langle\, G' \,\rangle_\lambda \right) \right| = \\
&= \Bigg| \int d\lambda\, w(\lambda) \Big( \langle\, F \,\rangle_\lambda \langle\, G \,\rangle_\lambda \pm \langle\, F \,\rangle_\lambda \langle\, G \,\rangle_\lambda \langle\, F' \,\rangle_\lambda \langle\, G' \,\rangle_\lambda - \\
&\quad - \langle\, F \,\rangle_\lambda \langle\, G' \,\rangle_\lambda \mp \langle\, F \,\rangle_\lambda \langle\, G \,\rangle_\lambda \langle\, F' \,\rangle_\lambda \langle\, G' \,\rangle_\lambda \Big) \Bigg| = \\
&= \Bigg| \int d\lambda\, w(\lambda)\, \langle\, F \,\rangle_\lambda \langle\, G \,\rangle_\lambda \Big( 1 \pm \langle\, F' \,\rangle_\lambda \langle\, G' \,\rangle_\lambda \Big) - \\
&\quad - \int d\lambda\, w(\lambda)\, \langle\, F \,\rangle_\lambda \langle\, G' \,\rangle_\lambda \Big( 1 \pm \langle\, F' \,\rangle_\lambda \langle\, G \,\rangle_\lambda \Big) \Bigg| \leq \\
&\leq \left| \int d\lambda\, w(\lambda)\, \langle\, F \,\rangle_\lambda \langle\, G \,\rangle_\lambda \Big( 1 \pm \langle\, F' \,\rangle_\lambda \langle\, G' \,\rangle_\lambda \Big) \right| + \\
&\quad + \left| \int d\lambda\, w(\lambda)\, \langle\, F \,\rangle_\lambda \langle\, G' \,\rangle_\lambda \Big( 1 \pm \langle\, F' \,\rangle_\lambda \langle\, G \,\rangle_\lambda \Big) \right| \leq \\
&\leq \left| \int d\lambda\, w(\lambda) \Big( 1 \pm \langle\, F' \,\rangle_\lambda \langle\, G' \,\rangle_\lambda \Big) \right| + \left| \int d\lambda\, w(\lambda) \Big( 1 \pm \langle\, F' \,\rangle_\lambda \langle\, G \,\rangle_\lambda \Big) \right| = \\
&= \int d\lambda\, w(\lambda) \Big( 1 \pm \langle\, F' \,\rangle_\lambda \langle\, G' \,\rangle_\lambda \Big) + \int d\lambda\, w(\lambda) \Big( 1 \pm \langle\, F' \,\rangle_\lambda \langle\, G \,\rangle_\lambda \Big) = \\
&= 1 \pm \langle\, F'\, G' \,\rangle + 1 \pm \langle\, F'\, G \,\rangle = 2 \pm \Big( \langle\, F'\, G' \,\rangle + \langle\, F'\, G \,\rangle \Big).
\end{aligned}
$$

Отсюда сразу же следует новое сильное BCHSH-неравенство

$$\Big|\langle F\, G\rangle - \langle F\, G'\rangle\Big| + \Big|\langle F'\, G\rangle + \langle F'\, G'\rangle\Big| \le 2,$$

из которого получается обычное BCHSH-неравенство:

$$\Big|\langle F\, G\rangle - \langle F\, G'\rangle + \langle F'\, G\rangle + \langle F'\, G'\rangle\Big| \le 2.$$

Таким образом, если в эксперименте будет обнаружено нарушение сильного BCHSH-неравенства, то это должно означать, что вероятностные предсказания квантовой теории НЕ сводятся к усреднению состояния квантовой системы по локальным контекстуально зависимым скрытым параметрам $\lambda$ некоторой классической теории, которую гипотетически можно было бы рассматривать как «полную теорию микромира».

# Граница Цирельсона

**Опр.: максимальное значение $|\langle S \rangle|$, достижимое в рамках НКМ, называется границей Цирельсона.**

**BCHSH-неравенство получено в предположении LR. Естественно задаться вопросом: может ли (и если может, то при каких условиях) BCHSH-неравенство нарушаться в НКМ?**

**Чтобы ответить на этот вопрос, сопоставим наблюдаемым $F$, $F'$, $G$ и $G'$ эрмитовы операторы $\hat{F}$, $\hat{F}'$, $\hat{G}$ и $\hat{G}'$. Пусть для наблюдаемых, относящихся к одной подсистеме ((1) или (2)), эти операторы НЕ коммутируют, то есть**

$$\left[\hat{F}, \hat{F}'\right] \neq 0 \quad \text{и} \quad \left[\hat{G}, \hat{G}'\right] \neq 0.$$

**Поскольку операторы $\hat{F}$, $\hat{F}'$, $\hat{G}$ и $\hat{G}'$ отвечают дихотомным наблюдаемым, то**

$$\hat{F}^2 = \hat{F}'^{\,2} = \hat{G}^2 = \hat{G}'^{\,2} = \hat{1}.$$

**В пространстве состояний составной системы $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ можно написать следующие дополнительные коммутационные соотношения для операторов $\hat{F}$, $\hat{F}'$, $\hat{G}$ и $\hat{G}'$:**

$$\left[\hat{F},\, \hat{G}\right] = \left[\hat{F},\, \hat{G}'\right] = \left[\hat{F}',\, \hat{G}\right] = \left[\hat{F}',\, \hat{G}'\right] = 0.$$

**Эти коммутаторы играют роль NS-условия в НКМ. Тогда можно говорить, например, о совместной измеримости (*совместном существовании*) наблюдаемых $F$ и $G$, но нельзя говорить о совместной измеримости (*совместном существовании*) наблюдаемых $F$ и $F'$. Это противоречит принципу "CR". То есть НКМ не противоречит принципу Локальности, но противоречит принципу "CR".**

**Для получения границы Цирельсона определим следующий оператор, который называется оператором Белла:**

$$\hat{S} = \hat{F}\hat{G} - \hat{F}\hat{G}' + \hat{F}'\hat{G} + \hat{F}'\hat{G}'.$$

**Тогда:**

$$\left(2\sqrt{2}\right)\,\hat{1} - \hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{F}^2 + \hat{F}'^{\,2} + \hat{G}^2 + \hat{G}'^{\,2}\right) - \hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{O}_1^\dagger\hat{O}_1 + \hat{O}_2^\dagger\hat{O}_2\right),$$

**где**

$$\hat{O}_1 = \hat{F} - \frac{\hat{G} - \hat{G}'}{\sqrt{2}} \qquad \text{и} \qquad \hat{O}_2 = \hat{F}' - \frac{\hat{G} + \hat{G}'}{\sqrt{2}}.$$

Усредняем это равенство по состоянию $\hat{\rho}$ произвольной микросистемы. Правая часть равенства неотрицательна. Поэтому

$$0 \leq 2\sqrt{2}\,\langle\,\hat{1}\,\rangle_\rho - \langle\,S\,\rangle_\rho = 2\sqrt{2} - \langle\,S\,\rangle_\rho.$$

Таким образом,

$$\langle\,S\,\rangle_\rho \leq 2\sqrt{2}.$$

Полностью аналогично можно показать, что

$$\langle\,S\,\rangle_\rho \geq -2\sqrt{2}.$$

Объединяя оба неравенства в одно, приходим к выражению для границы Цирельсона

$$\left|\langle\,S\,\rangle_\rho\right| \leq 2\sqrt{2}.$$

Данная граница впервые была получена в работе: B.S. Cirel'son, "Quantum generalizations of Bell's inequality", "Letters in Mathematical Physics", Vol.4, p.93 (1980). Перепишем последнее неравенство в терминах корреляторов:

$$\left| \langle F\, G \rangle_\rho - \langle F\, G' \rangle_\rho + \langle F'\, G \rangle_\rho + \langle F'\, G' \rangle_\rho \right| \le 2\sqrt{2}.$$

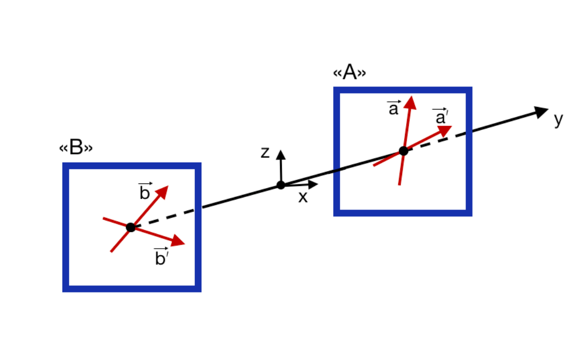
**Этот результат надо сравнить с BCHSH-неравенством:**

$$\left| \langle F\, G \rangle - \langle F\, G' \rangle + \langle F'\, G \rangle + \langle F'\, G' \rangle \right| \le 2.$$

**Из сравнения обоих неравенств видно, что в квантовой теории BCHSH-неравенство принципиально может нарушаться. Таким образом, открывается возможность экспериментальной проверки невозможности сведения квантовой парадигмы к классической. Конечно, при условии, что концепция LR адекватно отражает классическую парадигму. То есть, если найдется составная квантовая система, в которой можно измерить сумму Белла, и эта сумма $\left| \langle S \rangle_\rho \right| > 2$ (неравенство строгое), то квантовую парадигму невозможно свести к классической.**

**Остается важный вопрос: существуют ли такие квантовые состояния $\hat{\rho}$ и наблюдаемые $F$, $F'$, $G$, $G'$, на которых в реальных экспериментах можно достичь границы Цирельсона или хотя бы получить, что $\left| \langle S \rangle_\rho \right| > 2$?**

# Запутанные состояния вступают в игру




**Рассмотрим мысленный эксперимент, в котором подсистема $(1)$ отвечает фермиону, распространяющемуся вдоль оси "$y$", подсистема $(2)$ – фермиону, который двигается против направления оси "$y$". Наблюдаемые $F$ и $F'$ соответствуют удвоенным проекциям спина фермиона $(1)$ на направления $\vec{a}$ и $\vec{a}\,'$. Наблюдаемые $G$ и $G'$ – удвоенным проекциям спина фермиона $(2)$ на направления $\vec{b}$ и $\vec{b}\,'$ соответственно. Пусть все четыре направления непараллельны друг другу. Их удобно выбрать лежащими в плоскостях, которые параллельны плоскости $(x,\, z)$, как это показано на рисунке.**

**Ответ** на вопрос из предыдущего параграфа: для достижения границы Цирельсона в квантовой механике можно использовать состояние Белла

$$\begin{aligned}
\left|\,\Psi^-\,\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\,+\,\right\rangle^{(1)}\otimes\left|\,-\,\right\rangle^{(2)} - \left|\,-\,\right\rangle^{(1)}\otimes\left|\,+\,\right\rangle^{(2)}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{(1)}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{(2)} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{(1)}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{(2)}\right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим направление $\vec{a}$, которое задается единичным вектором $\vec{a} = (\sin\theta_a,\, 0,\, \cos\theta_a)$. Тогда оператор $\hat{F}$ можно записать как

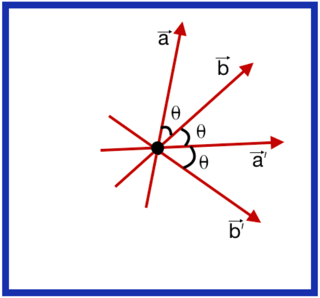
$$\hat{F} = \left(\vec{a}\,\vec{\sigma}^{\,(1)}\right) = \sigma_x^{(1)}\,\sin\theta_a + \sigma_z^{(1)}\,\cos\theta_a.$$

Абсолютно аналогичные формулы имеют место для операторов $\hat{F}'$, $\hat{G}$ и $\hat{G}'$. Тогда

$$\langle\, F\; G\,\rangle_{\Psi^-} \equiv \left\langle\,\Psi^-\,\middle|\left(\hat{F}\otimes\hat{G}\right)\middle|\,\Psi^-\,\right\rangle = -\cos\left(\theta_a - \theta_b\right) = -\cos\theta_{ab}.$$

Не представляет труда вычислить оставшиеся средние, которые входят в BCHSH-неравенство.

**В итоге** $|\langle S \rangle_{\psi-}| = |\cos\theta_{ab} - \cos\theta_{ab'} + \cos\theta_{a'b} + \cos\theta_{a'b'}|$.




**Максимум** $|\langle S \rangle_{\psi-}|$ **достигается для углов** $\theta_{ab} = \theta_{ba'} = \theta_{a'b'} = \theta = \pi/4$ **и** $\theta_{ab'} = 3\theta = 3\pi/4$**. В этом случае**

$$|\langle S \rangle_{\psi-}| = \left|3\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right| = \left|4\cos\frac{\pi}{4}\right| = 2\sqrt{2}$$

**попадает на границу Цирельсона и нарушает BCHSH-неравенство!**

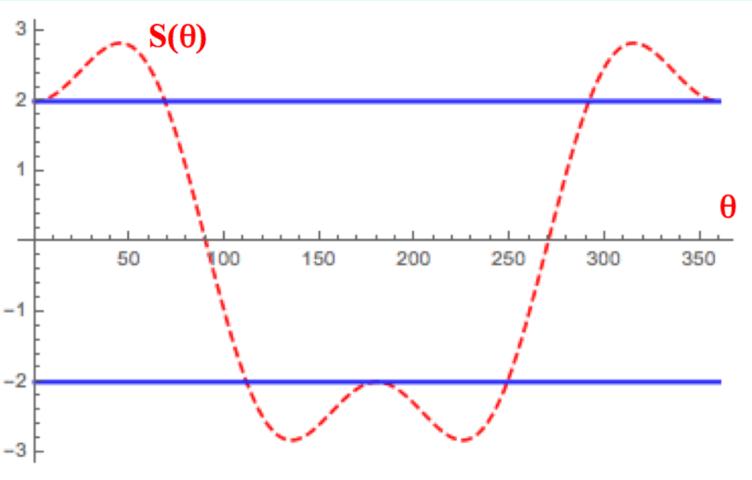



**График функции**

$$S(\theta) = 3\cos\theta - \cos 3\theta$$

**приведен на рисунке. По оси абсцисс отложен угол $\theta$ в градусах. BCHSH-неравенство нарушается при углах $\theta$, когда функция $S(\theta)$ больше $+2$ или меньше $-2$.**

# Запутанные состояния продолжают игру

**Теорема: любое ЧИСТОЕ запутанное состояние вида**

$$|\,\Psi\,\rangle \;=\; C_1\;|+\rangle^{(1)}|-\rangle^{(2)} \;+\; C_2\;|-\rangle^{(1)}|+\rangle^{(2)}$$

**с нормировкой** $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$ **нарушает BCHSH-неравенство. Максимальное нарушение достигается на состояниях Белла** $|\,\Psi^{\pm}\,\rangle$.

**Для доказательства теоремы найдем** $\langle\, F\,G\,\rangle_\Psi$ **в условиях, которые были сформулированы в параграфе "Запутанные состояния вступают в игру". Идейно простые, но несколько громоздкие вычисления дают:**

$$\langle\, F\,G\,\rangle_\Psi \;=\; -\,\cos\theta_a\,\cos\theta_b \;+\; 2\,\mathbf{Re}\,\left(C_1^*\,C_2\right)\,\sin\theta_a\,\sin\theta_b.$$

**Остальные средние вычисляются аналогично.**

**Пусть теперь направление** $\vec{a}$ **совпадает с осью "**$z$**", а направление** $\vec{a}\,'$ **перпендикулярно оси "**$z$**". Это ведет к тому, что** $\theta_a = 0$ **и** $\theta_{a'} = \pm\,\pi/2$.

**Для унификации дальнейшего доказательства воспользуемся произволом в выборе знака угла $\theta_{a'}$. Именно, всякий раз, когда $\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2) = -|\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2)|$ будем полагать $\theta_{a'} = +\pi/2$, в то время, когда $\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2) = +|\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2)|$, будем брать $\theta_{a'} = -\pi/2$. Тогда:** $\langle\, F\, G\,\rangle_\Psi = -\cos\theta_b$; $\langle\, F\, G'\,\rangle_\Psi = -\cos\theta_{b'}$; $\langle\, F'\, G\,\rangle_\Psi = -2\,|\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2)|\,\sin\theta_b$ **и** $\langle\, F'\, G'\,\rangle_\Psi = -2\,|\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2)|\,\sin\theta_{b'}$. **Используя полученные выше результаты, находим:**

$$|\langle\, F\, G\,\rangle_\Psi - \langle\, F\, G'\,\rangle_\Psi + \langle\, F'\, G\,\rangle_\Psi + \langle\, F'\, G'\,\rangle_\Psi| =$$

$$= \left|\cos\theta_b - \cos\theta_{b'} + 2\,|\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2)|\,\left(\sin\theta_b + \sin\theta_{b'}\right)\right|.$$

**Для нарушения BCHSH-неравенства выберем**

$$\cos\theta_b = -\cos\theta_{b'} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,|\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2)|^2}} \geq 0$$

**и**

$$\sin\theta_b = \sin\theta_{b'} = \sqrt{1 - \cos^2\theta_b} = \frac{2\,|\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2)|}{\sqrt{1 + 4\,|\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2)|^2}} \geq 0.$$

Тогда

$$|\langle F\,G\,\rangle_\Psi - \langle F\,G'\,\rangle_\Psi + \langle F'\,G\,\rangle_\Psi + \langle F'\,G'\,\rangle_\Psi| =$$

$$= 2\sqrt{1\,+\,4\,\left|\mathbf{Re}\,(C_1^* C_2)\right|^2} \geq 2$$

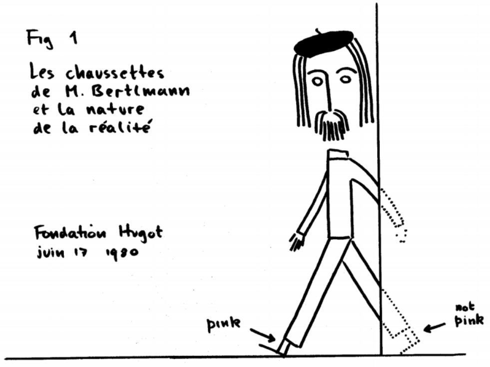
при любых ненулевых действительных значениях коэффициентов $C_1$ и $C_2$ и вполне очевидных условиях на комплексные коэффициенты. Максимальное значение $2\sqrt{2}$ достигается на состояниях Белла $|\,\Psi^\pm\,\rangle$. Теорема доказана.

Впервые данная теорема была доказана в работе N. Gisin, "Bell's inequality holds for all non-product states", Physycs Letters A154, pp.201-202 (1991). Однако эта статья в ключевых местах содержит две опечатки, которые чрезвычайно осложняют воспроизведение финального результата. Более общий и свободный от опечаток результат можно найти в работе S.Popescu, D.Rohrlich, "Generic quantum nonlocality", Physycs Letters A166, pp.293-297 (1992).

# Носки профессора Бертлмана

**В своем докладе "Bertlmann's socks and the nature of reality" ("Носки Бертлмана и природа реальности"), прочитанном в Колледж де Франс 17 июня 1980 года и опубликованном в книге J.S. Bell, "Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics", "Cambridge University Press", Cambridge (1987), Джон Белл приводит красивый пример, который лишний раз подчеркивает важность совместной измеримости/неизмеримости наблюдаемых характеристик квантовой системы для сохранения/нарушения BCHSH-неравенства.**

**Приведем тут вольный перевод основной идеи статьи:** ***"Дилетант, который не утруждал себя изучением квантовой механики, будет совершенно не впечатлен корреляционными свойствами запутанных состояний. Он сразу же укажет на множество примеров аналогичных корреляций, которые можно найти в повседневной жизни. Широко известен случай с носками профессора Бертлмана. Профессор Бертлман всегда носит носки разных цветов. Совершенно невозможно угадать, какого цвета будет носок в данный день на данной ноге профессора.***




***Но если Вы увидели (см. рисунок), что один носок Бертлмана розового цвета, то можете быть абсолютно уверены, что на другой ноге будет носок нерозового цвета, даже если Вы не видите эту ногу. Таким образом, наблюдение цвета первого носка и знание привычек профессора Бертлмана немедленно дает нам информацию о втором носке. Если не удивляться странному поведению профессора Бертлмана, то в носочной антикорреляции нет никакой тайны. И из этой привычки никак нельзя получить нарушение "носочного BCHSH-неравенства".***

Носки профессора
Райнхольда Бертлмана

и сам профессор
в 2010 году

Очевиден и ответ, почему "носочное BCHSH-неравенство" не может быть нарушено. Сколько бы ни было разноцветных носков у профессора Бертлмана, их всегда можно сложить в одну общую кучу. А потом эту кучу разделить на любое количество меньших куч. Таким образом, все совместные вероятности существования носков разного цвета неотрицательны. А это, как мы видели выше, не может привести к нарушению BCHSH-неравенства.

# Эксперименты по проверке неравенств Белла

**Самый первый эксперимент с коррелированными парами фотонов, в котором BCHSH-неравенства нарушались на уровне $5\sigma$, был выполнен в Беркли: S. J. Freedman and J. F. Clauser, "Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories", Phys. Rev. Lett. 28, p.938-941 (1972). Однако этот эксперимент не был свободен от нескольких "лазеек" (англ. "loopholes"), которые ставили под сомнение связь нарушения BCHSH-неравенств с доказательством справедливости квантовомеханического описания мира.**

**Эксперименты А. Аспе с коллегами в Орсэ: идея отложенного выбора Дж. Уиллера и случайная ориентация осей поляризаторов обеспечили пространственно-подобный интервал между выбором конфигурации обоих детекторов, то есть закрыта "лазейка локальности" (англ. "locality loophole" или "communication loophole") измерения: A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, "Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers", Phys. Rev. Lett. 49, pp.1804-1807 (1982). "Лазейка локальности" связана с тем, что при совместном измерении наблюдаемых для каждой из квантовых систем пространственно-временной интервал между системами оказывается времениподобным. Поэтому в процессе измерения чисто умозрительно не исключен обмен информацией между макроприборами. Такой обмен гипотетически обеспечивает нелокальную корреляцию между двумя измерениями. Таким образом, подобная корреляция, а не квантовая механика, может приводить к нарушению BCHSH-неравенства.**

# Дальнейшее развитие экспериментов

**I) В экспериментах с коррелированными парами фотонов учитываются только те результаты, которые получаются при регистрации двух фотонов. Но обычно эффективность такого детектирования не превосходит 10%. Может быть, какое-либо ”дополнительное” взаимодействие управляет отбором зарегистрированных событий и делает экспериментальную выборку нерепрезентативной (“лазейка измерения”)?**

**В работе P.H. Eberhard, Phys. Rev. A 47, R747 (1993) показано, что для опровержения этого утверждения необходимо иметь детекторы фотонов с эффективностью $\eta = 2/3 \approx 66,7$% и выше.**

**В настоящее время в эксперименте с фотонами получена максимальная эффективность детектирования $\eta_{max\ exp} \approx 78,6$% (см. A. Zeilinger et al., ”Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption”, Nature 497, pp.227–230 (2013) и B. G. Christensen et al., “Detection-Loophole-Free Test of Quantum Nonlocality, and Applications”, Phys. Rev. Lett. 111, 130406 (2013)). Необходимый результат достигнут! Неравенства Белла по-прежнему нарушаются.**

II) До недавнего времени в каждом из экспериментов по проверке BCHSH-неравенств можно было закрыть только одну из двух лазеек – либо локальности, либо измерения. Однако в 2015 году были успешно проведены сразу три эксперимента (два с фотонными парами: M. Giustina et al., ”Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons”, Phys. Rev. Lett. 115, 250401 (2015), L. K. Shalm et al., “Strong Loophole-Free Test of Local Realism”, Phys. Rev. Lett. 115, 250402 (2015) и один на коррелированных спинах $1/2$: B. Hensen et al., ”Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres”, Nature 526, pp.682–686 (2015)), которые успешно смогли закрыть сразу обе лазейки.

III) Во всех экспериментах по проверке BCHSH-неравенств необходимо сделать четыре серии измерений для получения величины каждого из корреляторов. Однако нет абсолютно никаких гарантий, что все четыре серии измерений проводятся при одних и тех же условиях (“лазейка контекстуальности” или ”contextuality loophole”). Даже если используются одни и те же экспериментальные приборы, то все равно невозможно точно воспроизвести все внутренние физические параметры макроприбора и, вообще говоря, гарантировать идентичность квантовых ансамблей коррелированных частиц. Эта проблема не решена до сих пор.

# Так почему Эйнштейн оказался не прав?

**Статистическая интерпретация квантовой механики допускает объяснение вероятностного характера измерений при помощи скрытых параметров. Альберт Эйнштейн предполагал, что подобные параметры должны быть локальными (и контекстуально зависимыми), чтобы не противоречить теории относительности.**

**Нильс Бор и Вернер Гейзенберг полагали, что случайность – неотъемлемое свойство измерения единичной физической системы в квантовой механике. Поэтому нет необходимости во введении каких-либо скрытых параметров. Это одно из важнейших утверждений Копенгагенской интерпретации.**

**Экспериментальное нарушение сильного BCHSH-неравенства означает, что квантовую механику невозможно свести к классической теории с локальными контекстуально зависимыми скрытыми параметрами. Поэтому предположение Эйнштейна несправедливо.**

**Классические теории с нелокальными скрытыми параметрами (т.е. противоречащие теории относительности) НЕ запрещены.**

# Спасибо за внимание!