

# Изучение свойств $J/\psi$ на установке КЕДР

(по материалам диссертации Харламовой Т.А.,  
ИЯФ им. Будкера, Новосибирск, 2019)

Дзюба Алексей / ЛМФКС ОФВЭ ПИЯФ НИЦ КИ

# План доклада

- Оппонент на защите диссертации Харламовой Т.А.
- Защита состоится 3 декабря 2019 г. в ИЯФ им. Г.И. Будкера
- С текстом диссертации и автореферата можно ознакомиться в библиотеке ПИЯФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г. И. БУДКЕРА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



ХАРЛАМОВА Татьяна Александровна

Измерение полной и парциальных ширин  
 $J/\psi$ -мезона с детектором КЕДР

01.04.16 – Физика атомного ядра и элементарных частиц

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Тодышев Корнелий Юрьевич

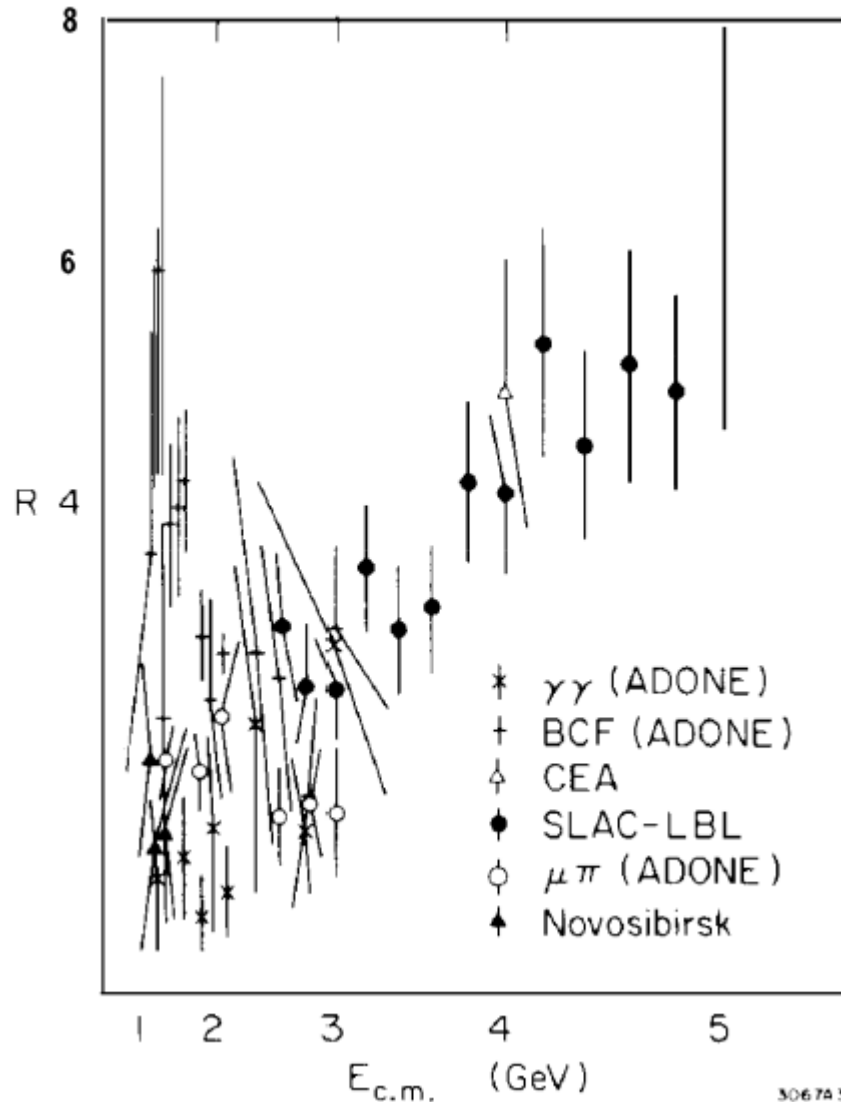
# Основные результаты опубликованы

1. V. V. Anashin, ..., Т. А. Kharlamova *et al.* Measurement of  $\Gamma_{ee}(J/\psi)$  with KEDR detector. Journal of High Energy Physics **05**, 119 (2018).
2. Т. А. Харламова. Измерение произведения лептонной ширины на вероятность распада  $J/\psi$ -мезона в адроны. Ядерная физика, **78**, 5, с. 399-402 (2015).
3. V. V. Anashin, ..., Т. А. Kharlamova, *et al.* The KEDR detector. Physics of Particles and Nuclei **44**, 4, p. 657–702 (2013).
4. V. V. Anashin, ..., Т. А. Kharlamova, *et al.* (KEDR Collaboration). Final analysis of KEDR data on  $J/\psi$  and  $\psi(2S)$  masses. Phys. Lett. B **749** 50 (2015).
5. V. V. Anashin, ..., Т. А. Kharlamova *et al.*. Measurement of  $\Gamma_{ee}(J/\psi) \cdot B(J/\psi \rightarrow e^+e^-)$  and  $\Gamma_{ee}(J/\psi) \cdot B(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-)$ . Phys. Lett. B **685**, 134 (2010).
6. V. V. Anashin, ..., Т. А. Kharlamova *et al.* Measurement of the ratio of the lepton widths  $\Gamma_{ee}/\Gamma_{\mu\mu}$  for the  $J/\psi$  meson. Phys. Lett. B **731**, 227 (2014).

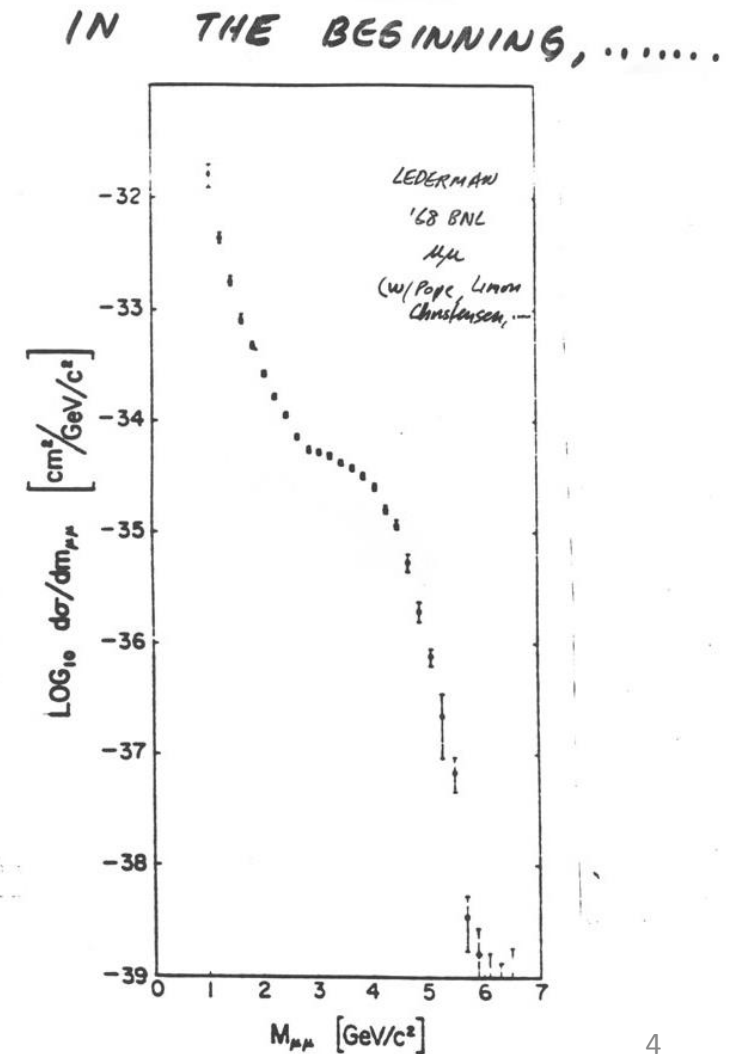
# До открытия J/ψ

Отношения к вероятности рождения  $\mu^+\mu^-$  пары к вероятности рождения адронов для электрон-позитронных взаимодействий в зависимости от энергии этого взаимодействия

Рихтер, лето 1974



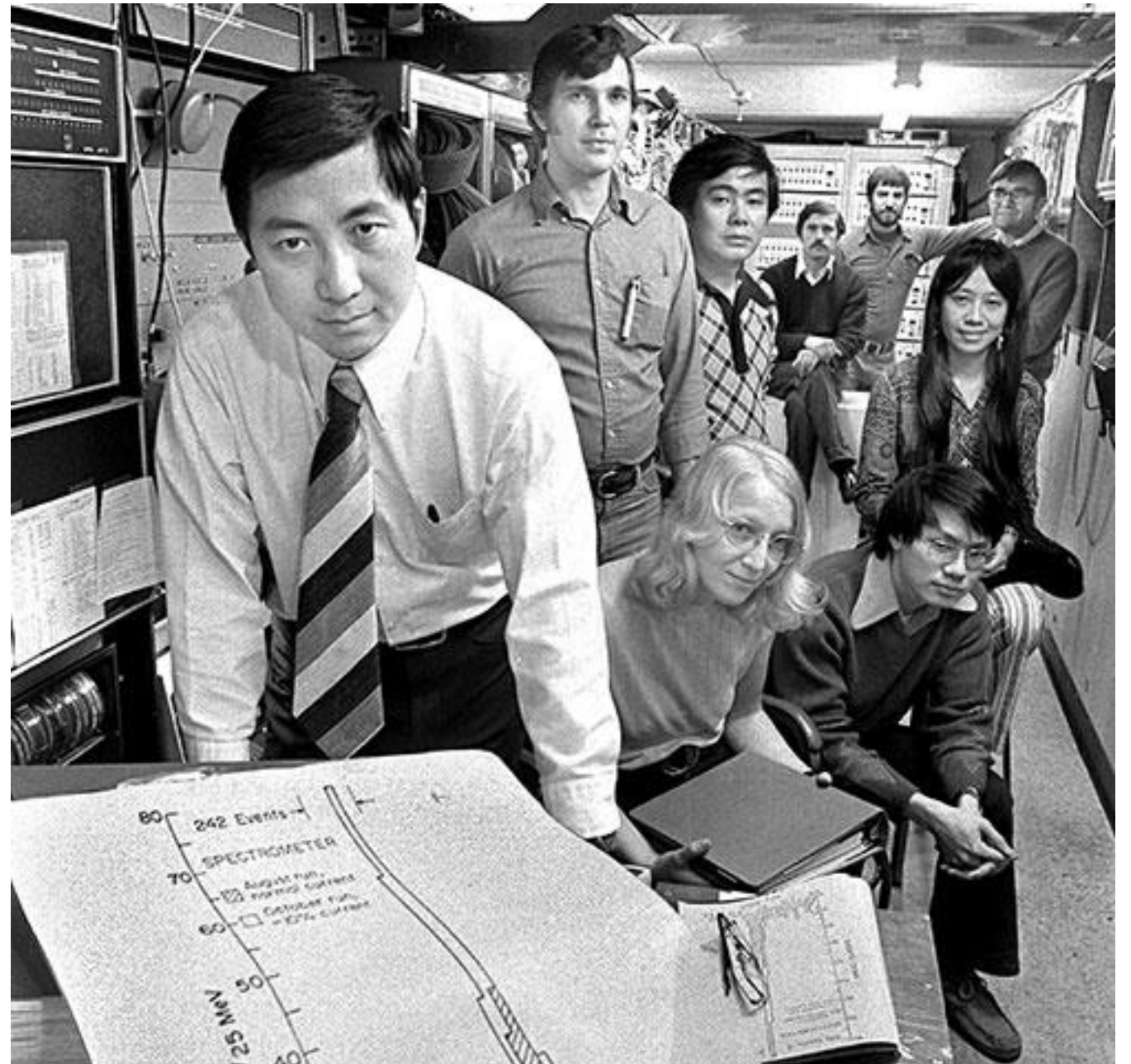
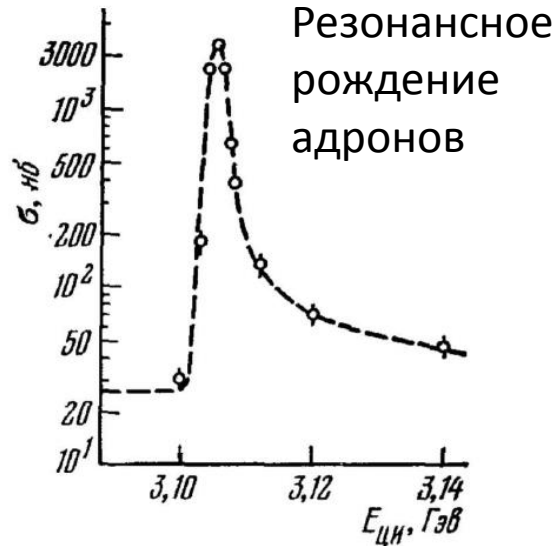
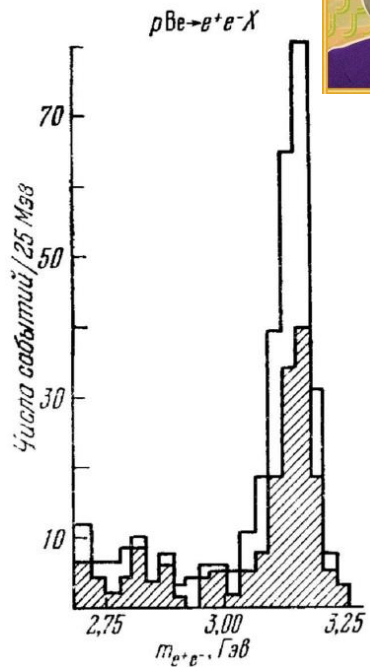
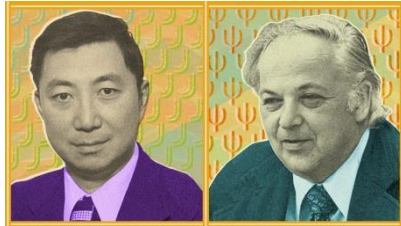
Ди-мюонный спектр возникающий при взаимодействии пучка протонов (29,5 ГэВ) с урановой мишенью  
**Phys. Rev. Lett. 25, 1523**



# Открытие $J/\psi$

J. J. Aubert, *et al.* Experimental Observation of a Heavy Particle *J. Phys. Rev. Lett.* **33** (1974) p. 1404

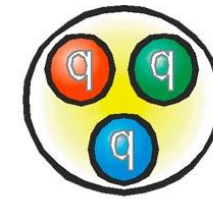
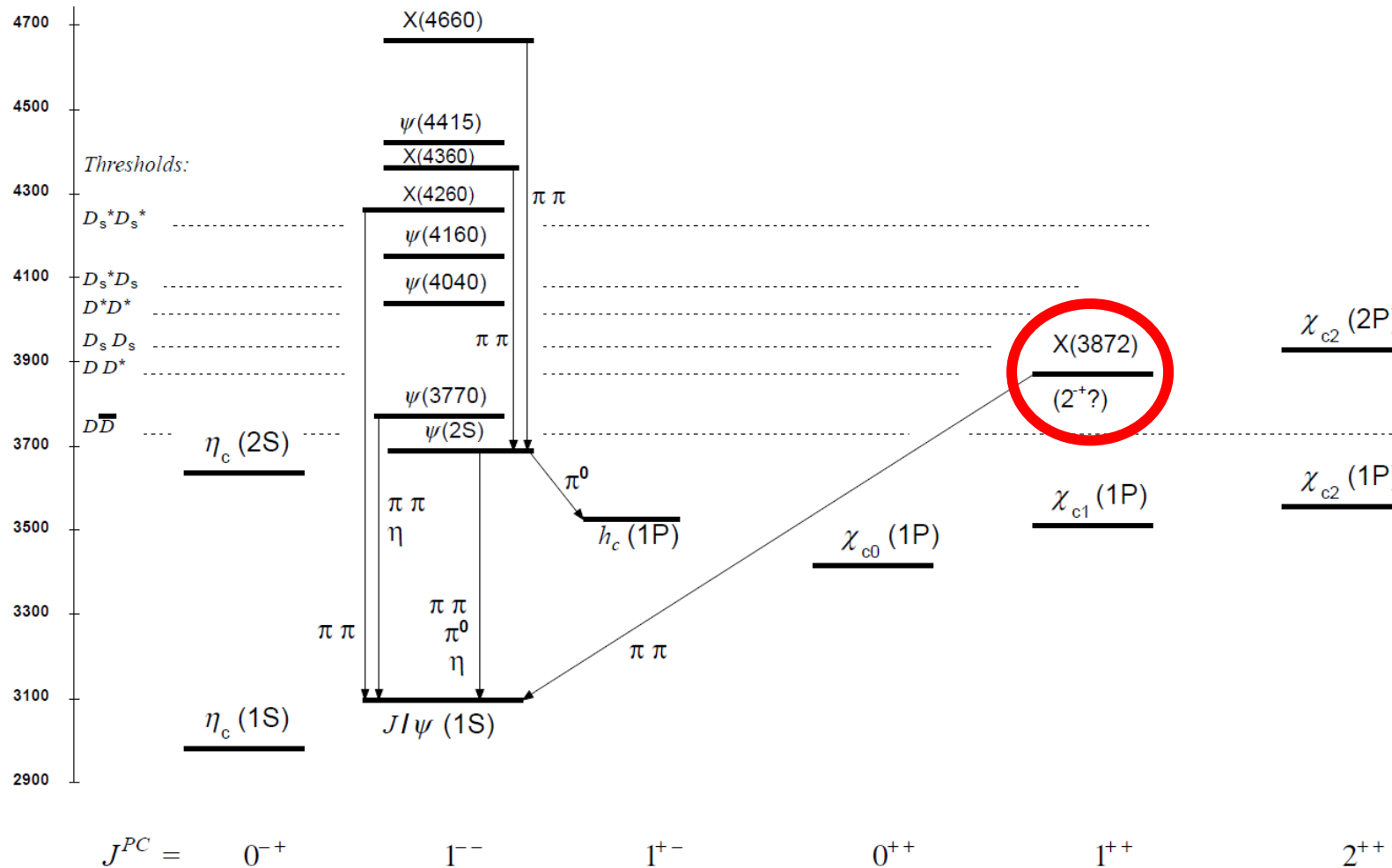
J. E. Augustin, *et al.* Discovery of a Narrow Resonance in  $e^+e^-$  Annihilation *Phys. Rev. Lett.* **33** (1974) p. 1406





# Семейство чармониевых состояний

Масса, МэВ



Normal baryon



Normal meson



Pentaquark



Tetraquark



Glueball



Hybrid meson

# Зачем изучать «профиль» $J/\psi$ ? (1/2)

- Полная и лептонная ширины  $J/\psi$  определяются **фундаментальными свойствами сильного и электромагнитного взаимодействия с-кварков**.
- Узкие резонансы дают вклад в поляризацию вакуума, т.е. используются для вычисления  $R$ , массы с-кварка и адронного вклада в  **$(g-2)$  мюона**. Точное знание полной и парциальных ширин необходимы для точного расчета этих характеристик.
- **Дальнейшее совершенствование потенциальных моделей и решёточных вычислений\***, точность которых для вычисления лептонной ширины сопоставима с экспериментальной точностью.

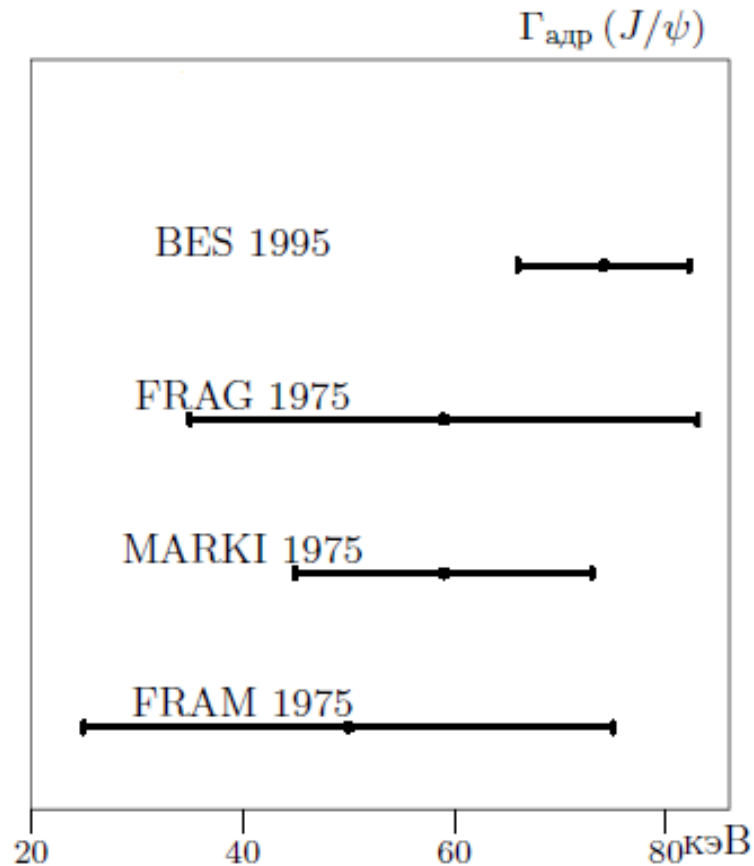
\* - ссылки в конце презентации

# Зачем изучать «профиль» $J/\psi$ ? (2/2)

- Ширина  $J/\psi$  необходимый «ингредиент» для извлечения константы связи бозона Хиггса с очарованными кварками, если будет зарегистрирован его распад на  $J/\psi$  и фотон (см. подробнее **PRD 88, 053003**).
- Параметры  $J/\psi$  мезона широко используются для калибровки детекторов БАК и определения эффективностей.
- Масса  $J/\psi$  используется для **калибровки энергии ускорителей**.



# Мировые данные



## KEDR

$$\Gamma_{e^+e^-}/\Gamma_{\mu^+\mu^-}(J/\psi) = 1.0022 \pm 0.0065,$$

Эксперимент	$\Gamma_{ee}(J/\psi)$ , кэВ	$\Gamma(J/\psi)$ , кэВ	Процесс
BES 95 [41]	$5.14 \pm 0.39$	$84.4 \pm 8.9$	$e^+e^- \rightarrow$ адроны, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ , $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$
BaBar 04 [42]	$5.53 \pm 0.18$	$92.7 \pm 3.1$	$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma$ ISR
CLEO 06 [43]	$5.68 \pm 0.16$	$95.1 \pm 2.7$	$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma$ ISR
КЕДР 10 [1]	$5.57 \pm 0.13$	$93.2 \pm 2.0$	$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ , $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$
BES3 16 [44]	$5.59 \pm 0.09$	$93.7 \pm 1.6$	$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma$ ISR
PDG [31]	$5.55 \pm 0.14 \pm 0.02$	$92.9 \pm 2.8$	
KEDR 18 [46]	$5.55 \pm 0.10$	$92.9 \pm 1.8$	$e^+e^- \rightarrow$ адроны, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$
Решёточные КХД-расчёты:			
HISQ [27]	$5.48 \pm 0.16$	$91.8 \pm 2.7$	
Twisted mass [30]	$5.8 \pm 0.2$	$97.1 \pm 3.4$	

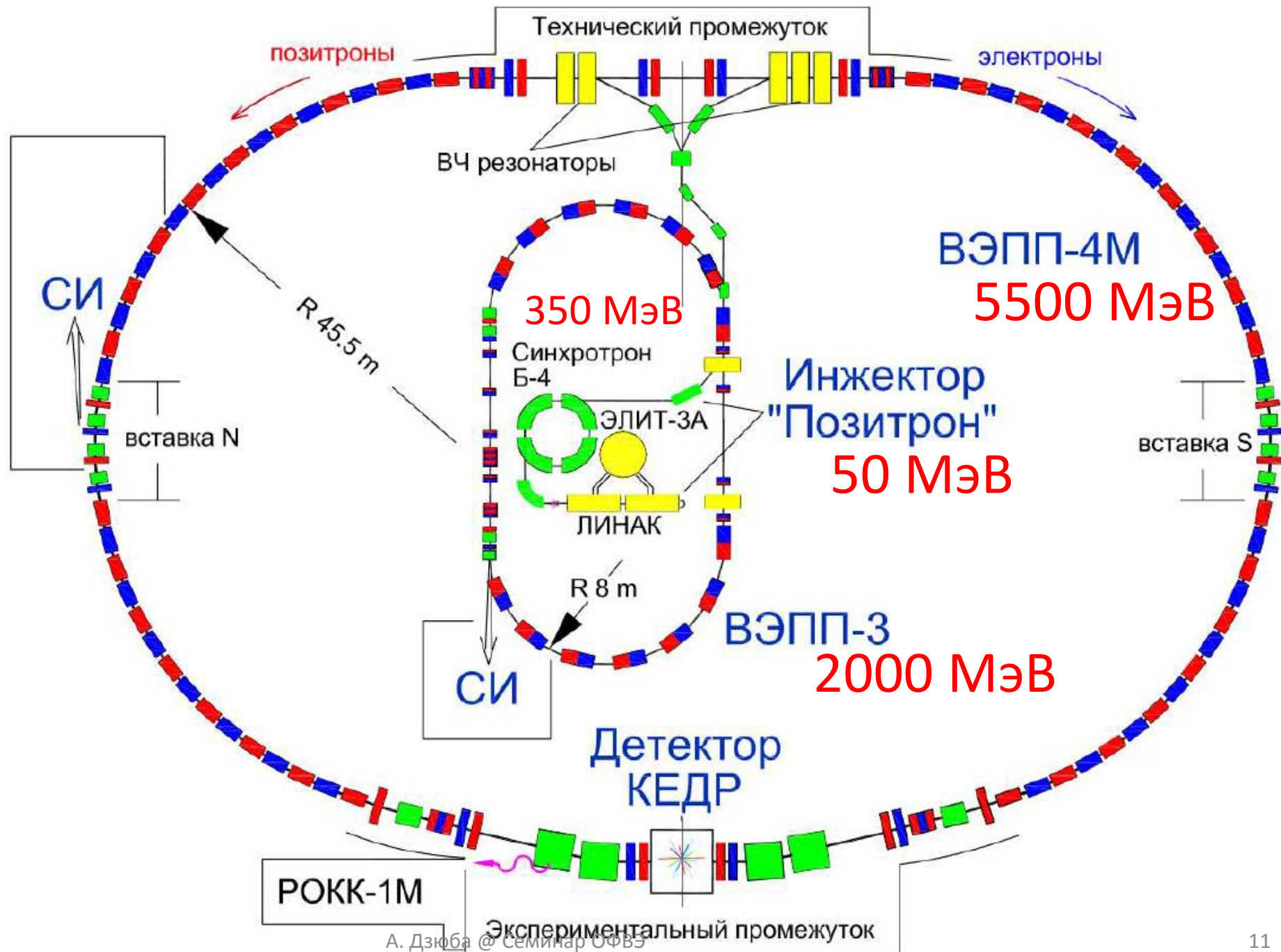
# Цели диссертационной работы Харламовой Т.А.

- прямое прецизионное измерение ширины  $J/\psi$ -мезона;
- измерение парциальных ширин  $J/\psi$ -мезона и величины произведения электронной ширины на вероятность распада в адроны  $\Gamma_{ee}(J/\psi) \cdot B_{\text{адр}}(J/\psi)$ ;
- разработка метода идентификации заряженных частиц по их ионизационным потерям в дрейфовой камере.



**Забегаая вперед, основное замечание к диссертации состоит в том, что разработанный метод идентификации частиц по ионизационным потерям не использовался для получения полной и парциальной ширин  $J/\psi$ .**

# ВЭПП-4



# Параметры ускорителя ВЭПП-4

Периметр кольца	366 м
Радиус поворота	34.5 м
Максимальная энергия	5.5 ГэВ
Количество сгустков в пучке	2
Продольный размер сгустка	5 см
Максимальный ток в одном сгустке (E = 1.5 ГэВ)	1.5 мА
Максимальная светимость (E = 1.5 ГэВ)	$10^{30} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$

Энергия взаимодействия пучков 11 ГэВ

Два независимых метода определения энергии

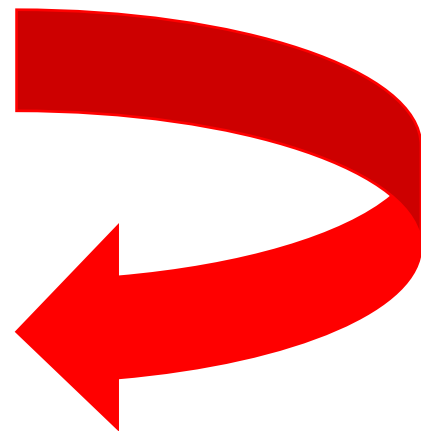
1. Метод резонансной деполяризации (точность в области - 25 кэВ)
2. Определение максимальной энергии гамма-квантов обратного комптоновского рассеяния лазерных фотонов (точность 100 кэВ)

# Параметры ускорителя ВЭПП-4

Периметр кольца	366 м
Радиус поворота	34.5 м
Максимальная энергия	5.5 ГэВ
Количество сгустков в пучке	2
Продольный размер сгустка	5 см
Максимальный ток в одном сгустке (E = 1.5 ГэВ)	1.5 мА
Максимальная светимость (E = 1.5 ГэВ)	$10^{30} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$

**Метод регистрации фотонов тормозного излучения (два электромагнитных калориметра, сэндвич – 1 мм Pb / 5мм пластический сцинтиллятор,  $18X_0$ , расположен в 18 м от детектора )**

**ОНЛАЙН**



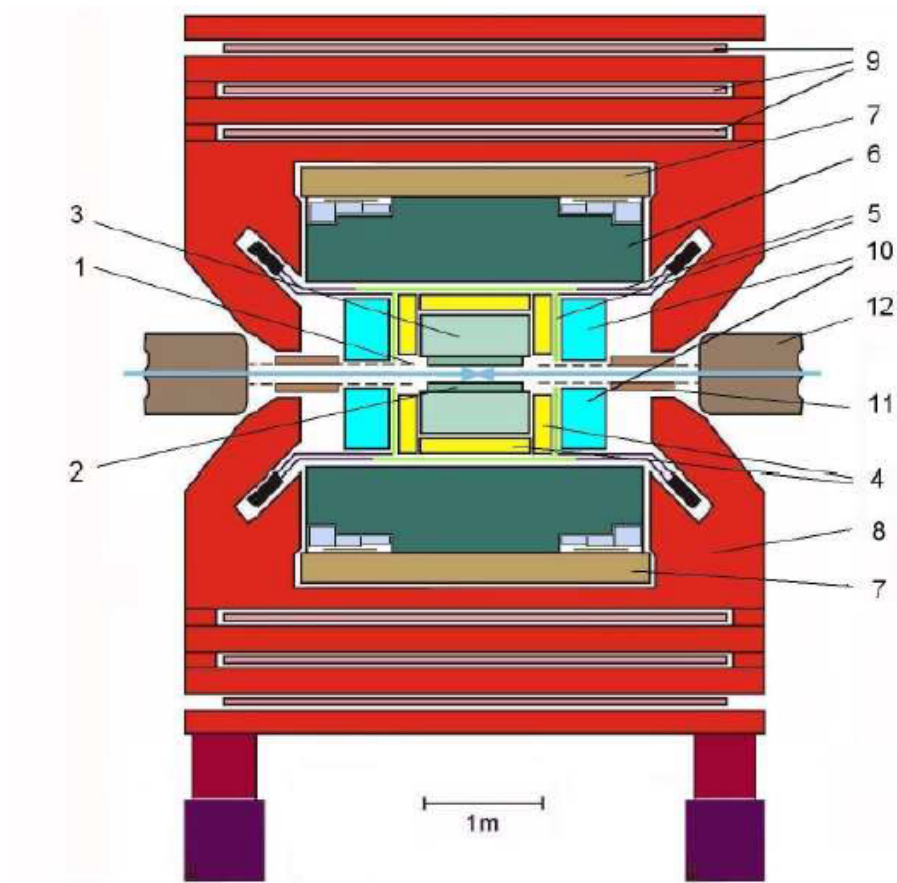
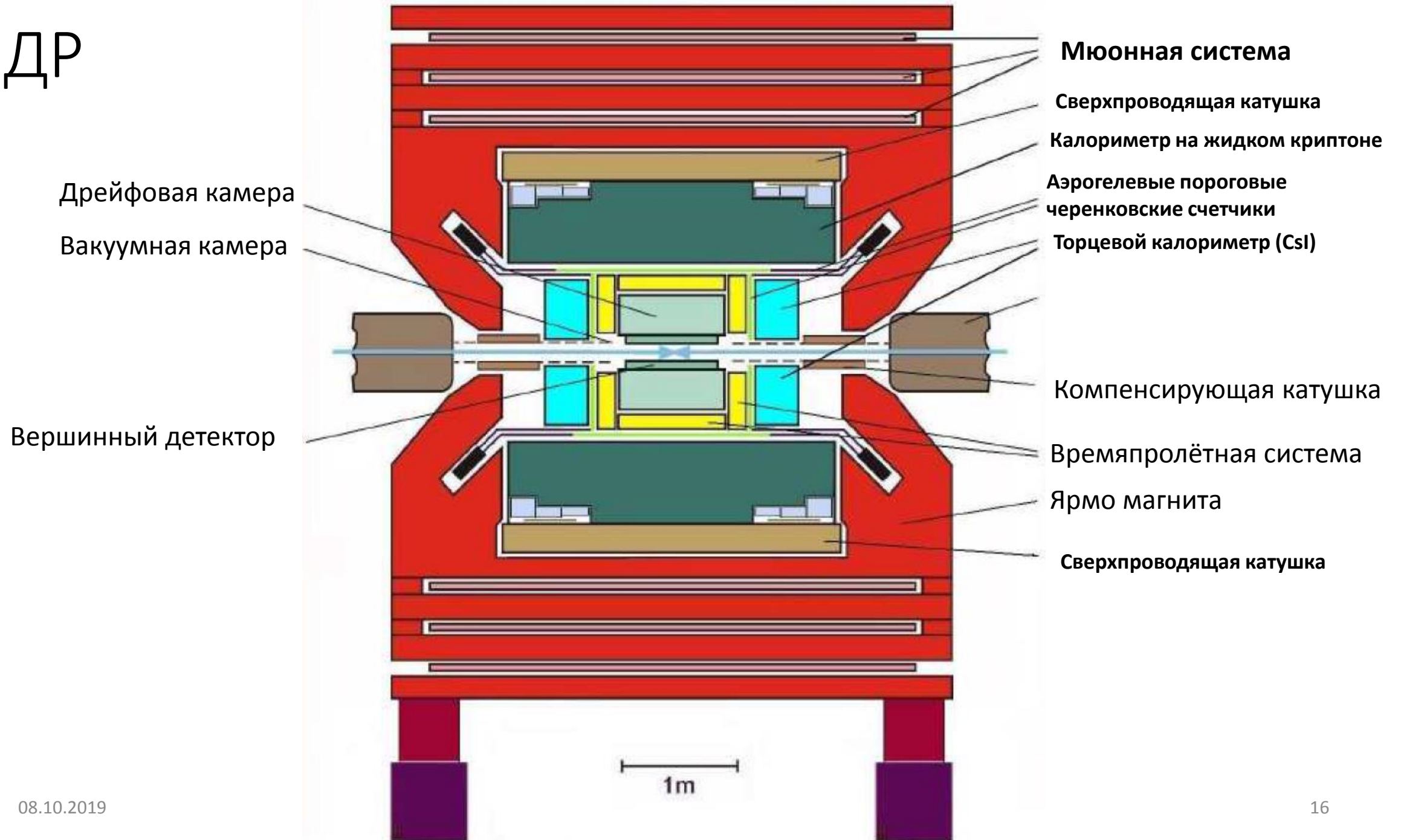


Рис. 2.2. Детектор КЕДР. Цифрами обозначены: 1 – вакуумная камера, 2 – вершинный детектор, 3 – дрейфовая камера, 4 – времяпролётная система, 5 – цилиндрический LKr-калориметр, 6 – обмотка магнита, 7 – мюонная система, 8 – ярмо магнита, 9 – торцевой CsI-калориметр, 10 – аэрогелевые черенковские счётчики.

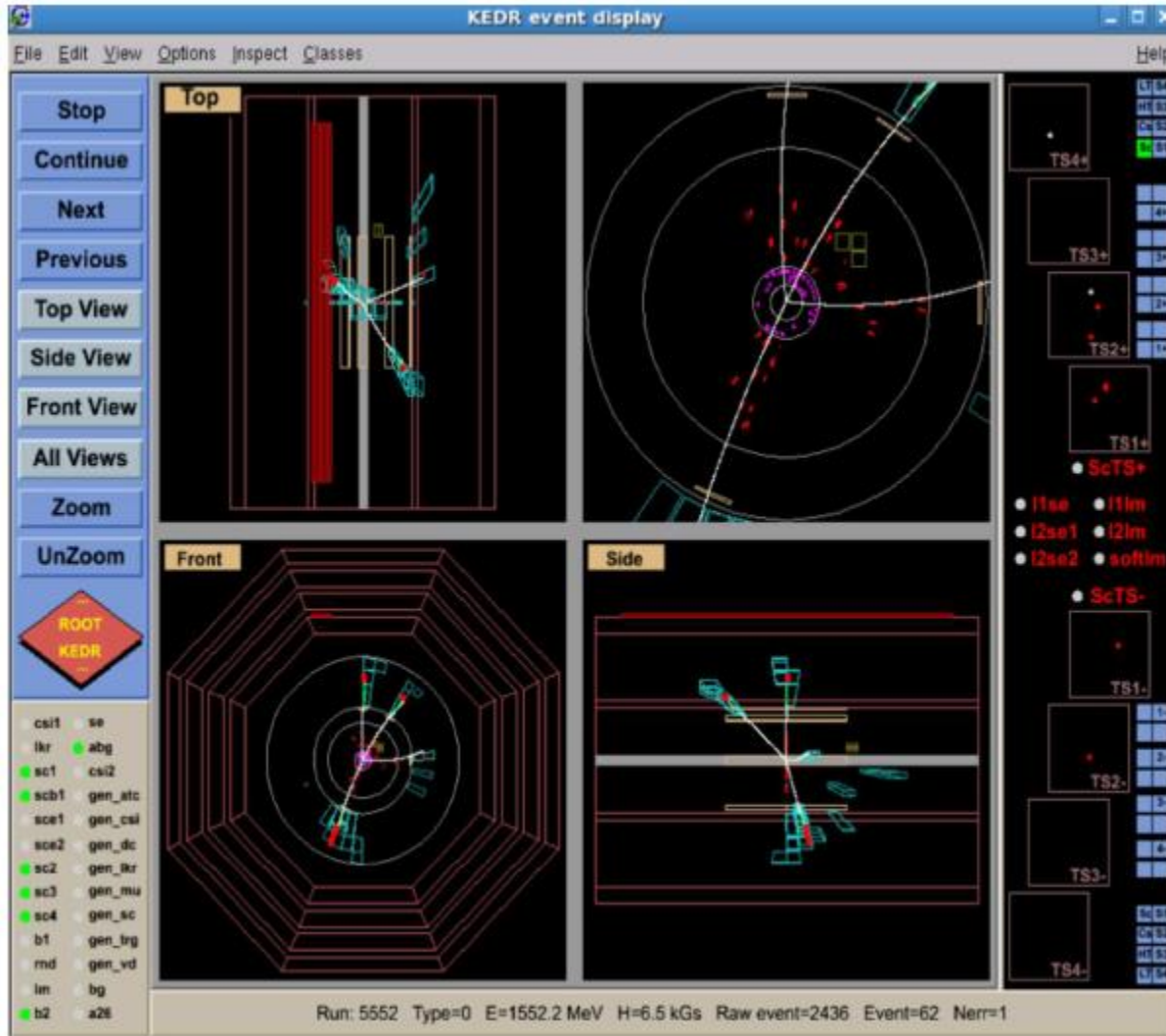




# КЕДР



# Отбор распадов в адроны



Подавление мюонной компоненты

Подавление электронной компоненты

Суммарное энерговыделение  $700 < E_{\text{кал}} < 2500$  МэВ;

Энерговыделение в баррельном калориметре

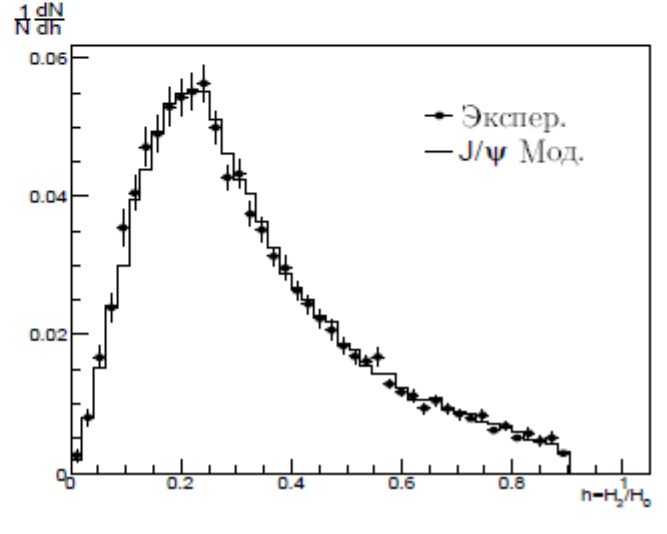
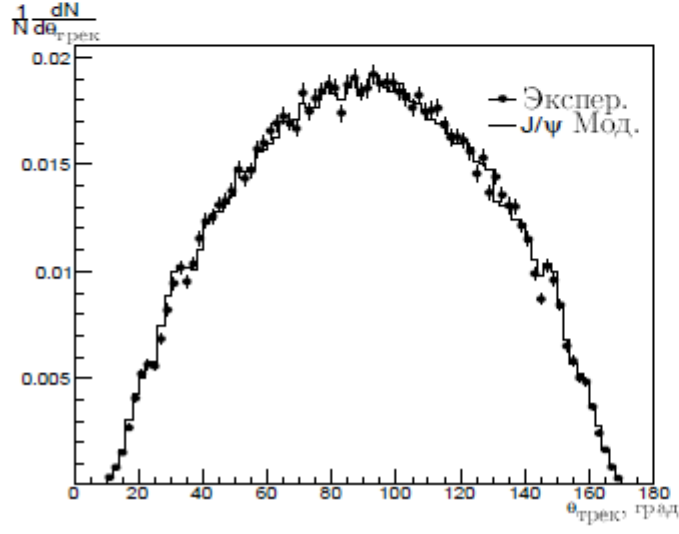
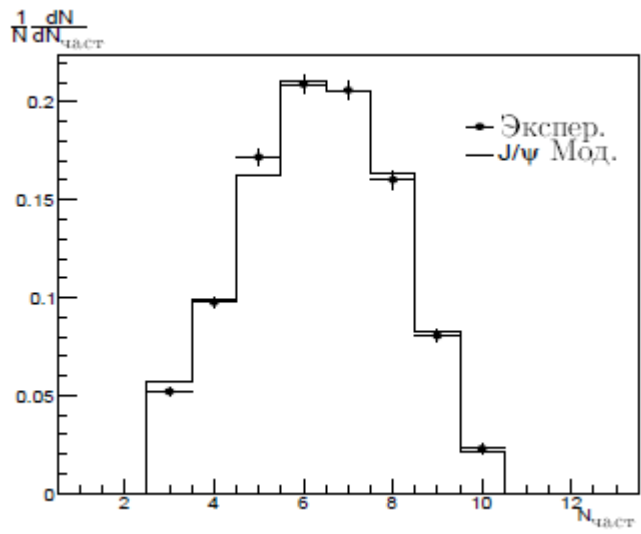
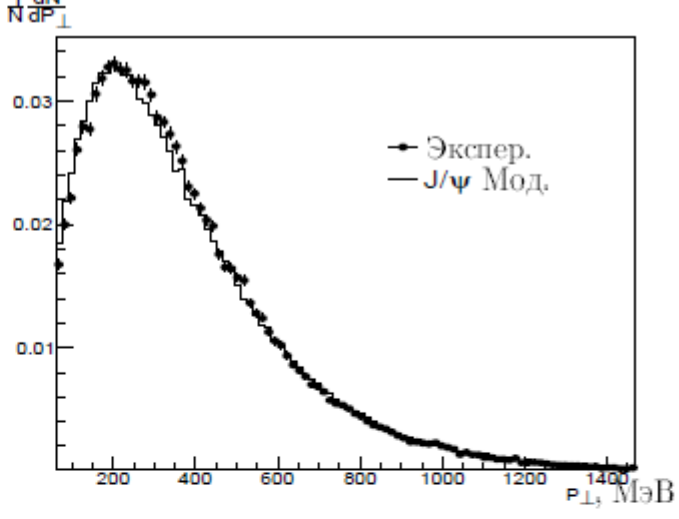
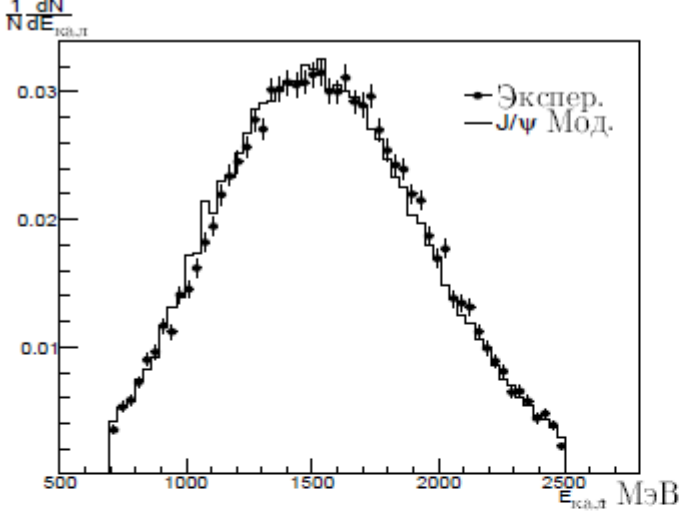
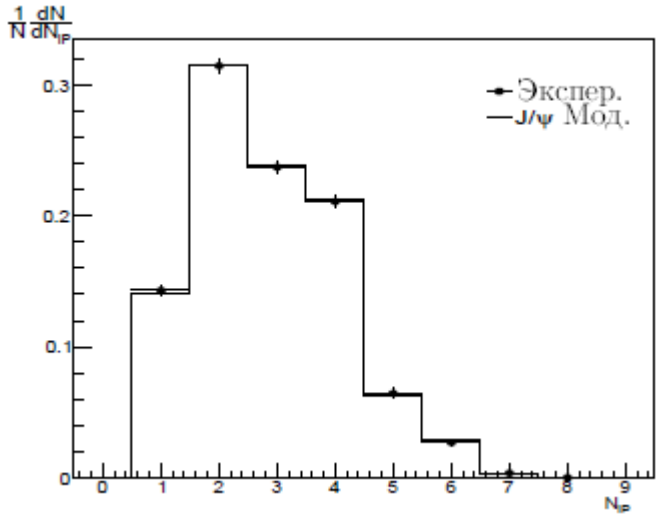
$$E_{\text{LKr}}/E_{\text{кал}} > 0.15;$$

Не менее трех треков в камере, включая один трек из первичной вершины

Кластеры в калориметре не приписанные к трекам

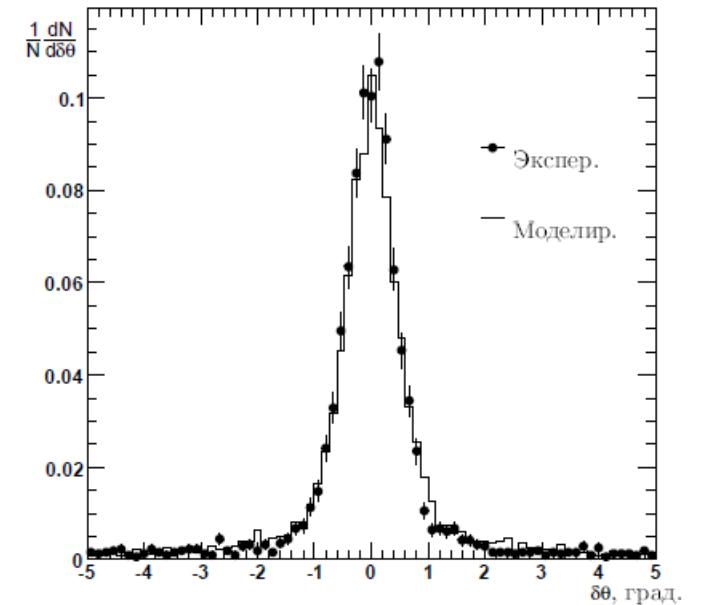
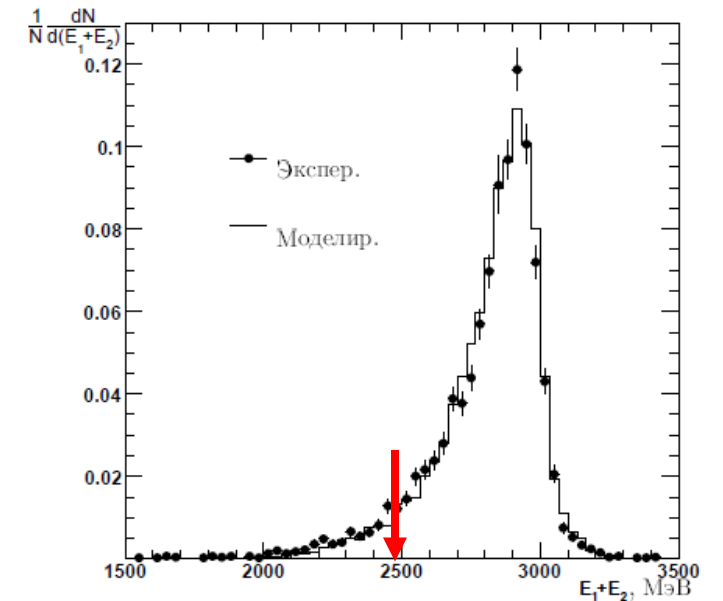
Валидация и определение эффективности по Монте-Карло

# Адронные события (данные и моделирование)



# Отбор электронов

- наличие двух кластеров в калориметре, лежащих в диапазоне углов  $40^\circ < \theta < 140^\circ$  от оси пучков и имеющих энерговыделение  $E_{1,2}$  более 700 МэВ каждый;
- выделившаяся в калориметре энергия, не приписанная двум отобранным кластерам, менее 10% от полного энерговыделения;
- расколлинеарность по полярному  $\theta$  и азимутальному  $\phi$  углам менее  $15^\circ$ ;
- сферичность события, вычисленная по заряженным трекам, менее 0.05;
- наличие двух или трех треков из места встречи в дрейфовой камере. Трек считался исходящим из места встречи, если для него прицельный параметр по отношению к оси пучков  $\rho < 0.5$  см, координата на треке, ближайшая к оси пучков  $z < 13$  см и поперечный импульс  $P_\perp > 100$  МэВ.

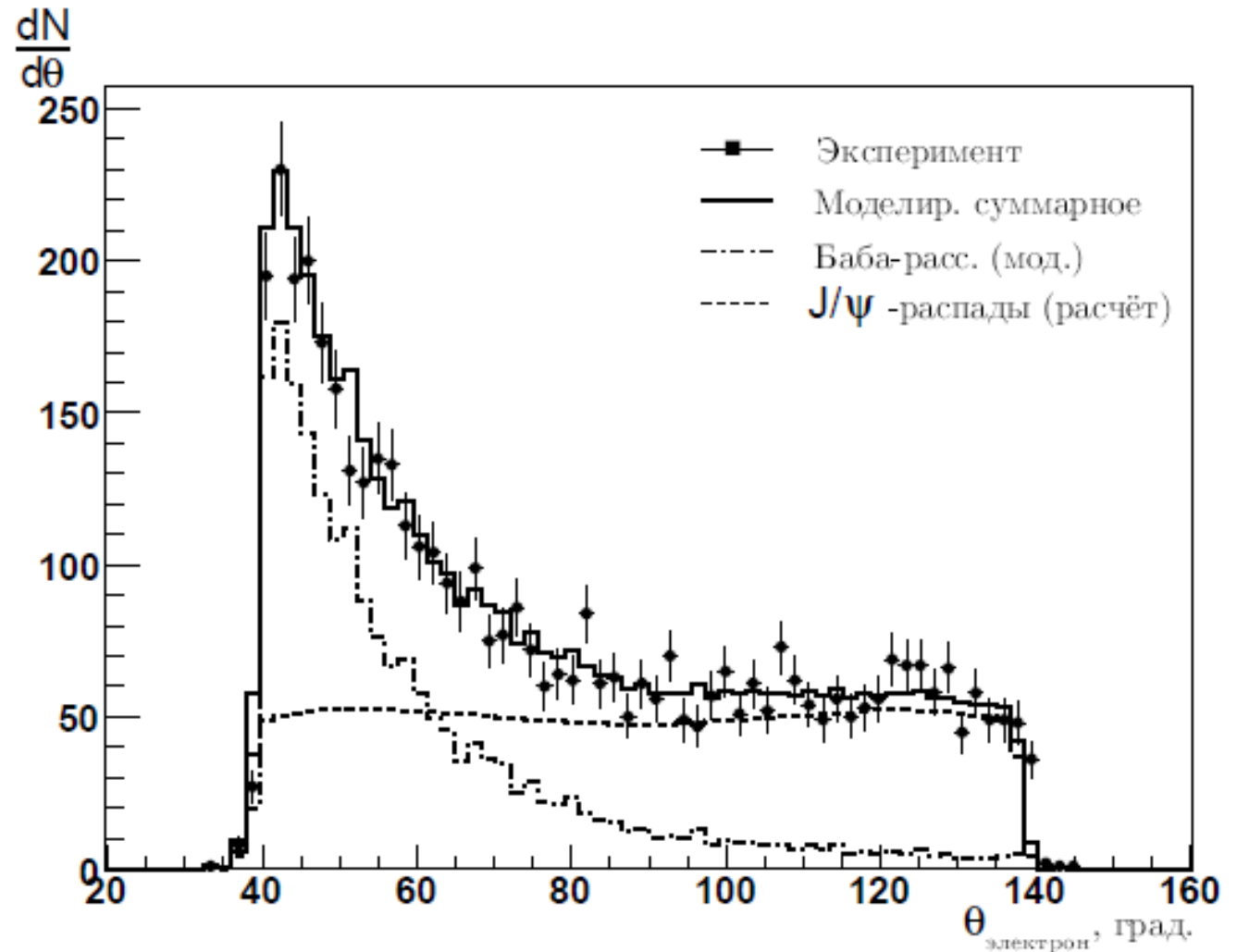


# Выделение резонансного вклада

Основным физическим фоном в электронном канале является нерезонансное упругое рассеяние (рассеяние Баба)

Выделяется по углу вылета электрона

Разделение использовалось в совместной подгонке параметров для определения парциальных ширин





# Сечение упругого рассеяния

Резонансный вклад

Нерезонансное сечение КЭД

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{ee \rightarrow ee} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{КЭД}}^{ee \rightarrow ee} + \frac{1}{W^2} (1 + \delta_{sf}) \left\{ \frac{9}{4} \frac{\Gamma_{ee}^2}{\Gamma M} (1 + \cos^2 \theta) \text{Im} f - \frac{3\alpha}{2} \frac{\Gamma_{ee}}{M} \left[ (1 + \cos^2 \theta) \text{Re} \frac{f^*}{1 - \Pi_0(s)} - \frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)} \text{Re} \frac{f^*}{1 - \Pi_0(t)} \right] \right\}$$

Интерференционные члены

«Резонансная функция»

$$f(W) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\beta} \left( \frac{W^2}{M^2 - W^2 - iM\Gamma} \right)^{1-\beta}$$

Рад.поправки: Фадин, Кураев  $\beta = \frac{4\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{W}{m_e} - \frac{1}{2} \right)$

$$\delta_{sf} = \frac{3}{4}\beta + \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \beta^2 \left( \frac{37}{96} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{36} \ln \frac{W}{m_e} \right),$$

# Сечение рождения адронов

Интерференция резонансного и нерезонансного вкладов

Сечение резонансного процесса

$$\sigma_{\text{п.г.}}^{\text{адр}}(W) = \frac{12\pi}{W^2} \left\{ \left(1 + \delta_{\text{sf}}\right) \left[ \frac{\Gamma_{ee}\tilde{\Gamma}_{\text{адр}}}{\Gamma M} \text{Im} f(W) - \frac{2\alpha\sqrt{R\Gamma_{ee}\tilde{\Gamma}_{\text{адр}}}}{3W} \lambda \text{Re} \frac{f^*(W)}{1-\Pi_0} \right] - \frac{\beta\Gamma_{ee}\tilde{\Gamma}_{\text{адр}}}{2\Gamma M} \left[ \left(1 + \frac{M^2}{W^2}\right) \arctan \frac{\Gamma W^2}{M(M^2 - W^2 + \Gamma^2)} - \frac{\Gamma M}{2W^2} \ln \frac{\left(\frac{M^2}{W^2}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma M}{W^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{M^2}{W^2}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma M}{W^2}\right)^2} \right] \right\},$$

Поправки на излучение жестких фотонов

Параметр характеризующий силу интерференционных эффектов (основная теоретическая систематика):

$$\lambda = \sqrt{\frac{R\mathcal{B}_{ee}}{\mathcal{B}_{\text{адр}}}} + \sqrt{\frac{1}{\mathcal{B}_{\text{адр}}}} \sum_m \sqrt{b_m \mathcal{B}_m^{(s)}} \langle \cos \phi_m \rangle_{\Theta}.$$

**Связь эффективной и полной адронных ширин (суммирование по адронным каналам (m))**

$$\tilde{\Gamma}_{\text{адр}} = \Gamma_{\text{адр}} \times \left( 1 + \frac{2\alpha}{3(1 - \text{Re}\Pi_0)\mathcal{B}_{\text{адр}}} \sqrt{\frac{R}{\mathcal{B}_{ee}}} \times \sum_m \sqrt{b_m \mathcal{B}_m^{(s)}} \langle \sin \phi_m \rangle_{\Theta} \right)$$

# Интегральная светимость

**11 точек по энергии**

**Интегральная светимость 230 нбн – 1,  
что соответствует 250000  $J/\psi$**

**Светимость вычислялась по Баба-  
рассеянию**

**Измерение энергии методом  
резонансной деполяризации (26  
калибровочных заходов, точность  
интерполяции не превышает 25 кэВ)**

Точка по энергии	Энергия, МэВ	Интеграл светимости, нбн <sup>-1</sup>
1	3107.206 ± 0.040	24.78 ± 0.08
2	3099.157 ± 0.040	8.34 ± 0.04
3	3098.704 ± 0.025	14.43 ± 0.06
4	3098.201 ± 0.025	18.84 ± 0.05
5	3097.652 ± 0.016	21.85 ± 0.06
6	3097.011 ± 0.012	16.22 ± 0.05
7	3095.929 ± 0.012	22.60 ± 0.07
8	3095.498 ± 0.020	23.03 ± 0.08
9	3093.355 ± 0.036	22.69 ± 0.08
10	3089.308 ± 0.040	14.65 ± 0.06
11	3096.223 ± 0.024	18.99 ± 0.07

# Определение парциальных ширин

Адронный канал

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(N_i^{\text{эксп}} - N_i^{\text{теор}})^2}{N_i^{\text{эксп}}} + \sum_i \sum_j \frac{(n_{ij}^{\text{эксп}} - n_{ij}^{\text{теор}})^2}{n_{ij}^{\text{эксп}}},$$

Электронный канал. События делятся по энергиям пучка (i) по углу (j, 10 точек в диапазоне от 40 до 140 градусов)

$$N_i^{\text{теор}} = L_i \cdot \sigma^{\text{адр}}(W_i),$$

$$\sigma^{ee}(W, \theta) = \varepsilon_{ee}(\theta) \left( \frac{d\sigma}{d\theta} \right)^{ee \rightarrow ee}(W).$$

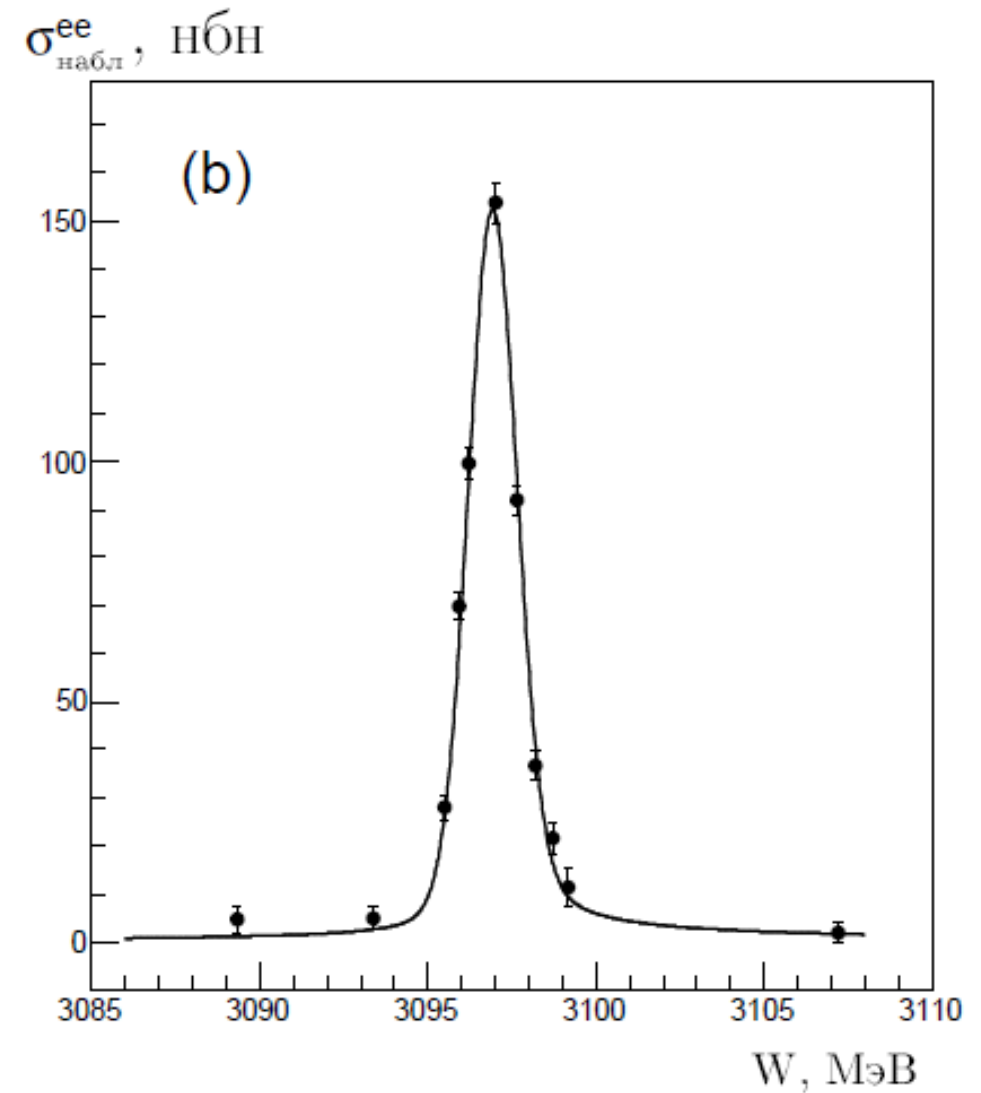
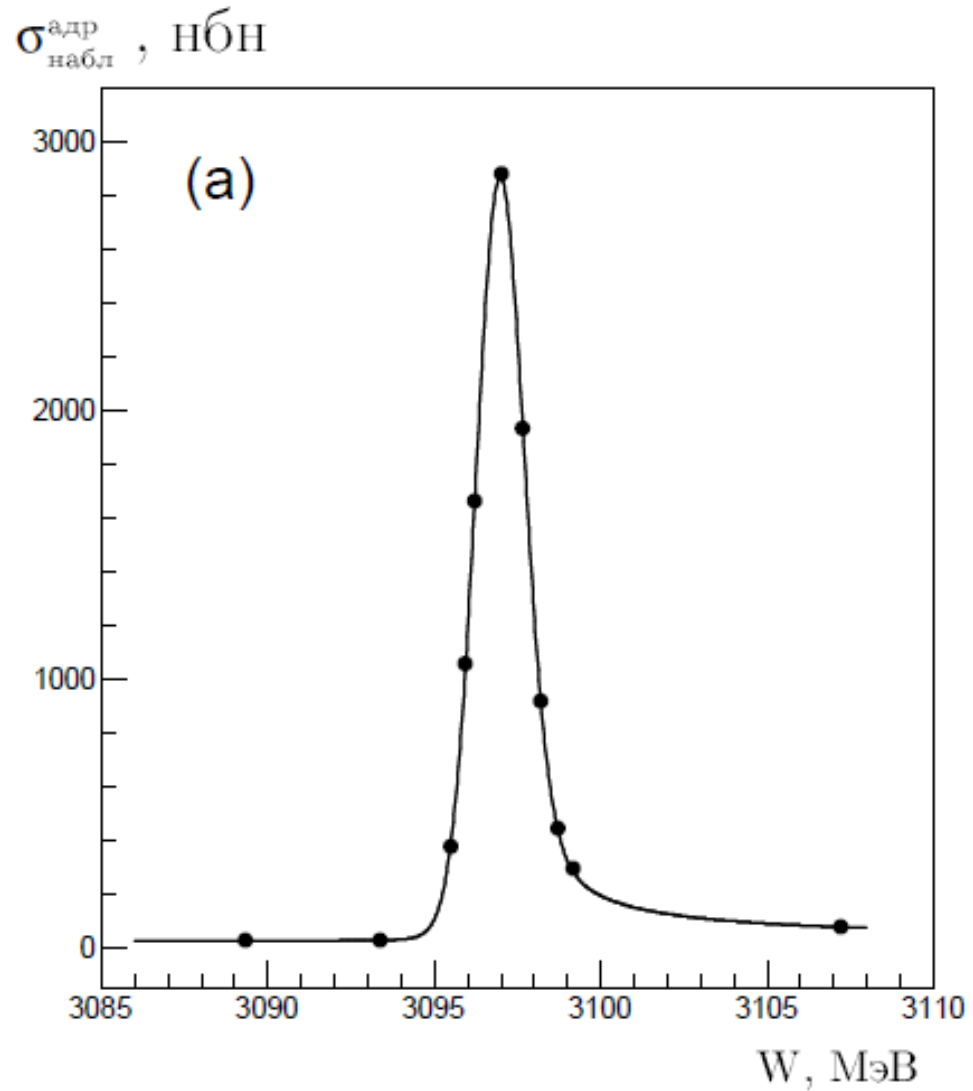
$$n_{ij}^{\text{теор}} = L_i \cdot \sigma^{ee}(W_i, \theta_j).$$

Эффективности (триггерная и оффлайн) вычислялись путем Монте-Карло моделирования

$$\sigma^{\text{адр}}(W) = \varepsilon_{\text{адр}} \int \sigma_{\text{п.г.}}^{\text{адр}}(W') G(W, W') dW' + \sigma_{\text{конт}}(W), \quad \sigma_{\text{конт}}(W) = \sigma_0 \cdot \left( \frac{m_{J/\psi}}{W} \right)^2.$$

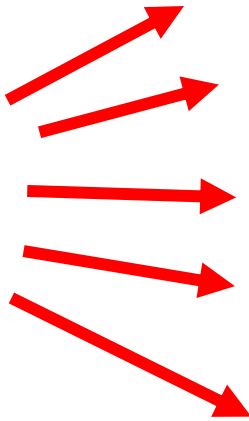
# Наблюдаемые сечения в области $J/\psi$

P-value 40%



# Несколько вариантов подгонок

Сильная  
корреляция  
параметров



Параметр	Подгонка 1	Подгонка 2	Подгонка 3	Подгонка 4
$\Gamma$ (кэВ)	–	–	–	$92.45 \pm 1.40$
$\Gamma_{\text{адр}}$ (кэВ)	–	–	$81.37 \pm 1.36$	–
$\Gamma_{ee}$ (кэВ)	$5.550 \pm 0.056$	–	$5.550 \pm 0.056$	$5.549 \pm 0.056$
$\Gamma_{ee} \cdot \mathcal{B}_{\text{адр}}$ (кэВ)	–	$4.884 \pm 0.048$	–	–
$\Gamma_{ee} \cdot \mathcal{B}_{ee}$ (кэВ)	$0.3331 \pm 0.0066$	$0.3331 \pm 0.0066$	–	–
$m$ (МэВ)	$3096.902 \pm 0.004$			
$R_L$	$0.973 \pm 0.008$			
$\sigma_W$ (МэВ)	$0.692 \pm 0.004$			
$\sigma_0$ (нбн)	$28.70 \pm 1.48$			

$$L_i = R_L \cdot L(E_i),$$

Калибровочный коэффициент  
для расчёта светимости

Энергетический разброс пучка



# Систематические погрешности (светимость)

Источник погрешности	Неопределённость, %
Вариация условий отбора	0.8
Выставка калориметра	0.2
Моделирование отклика калориметра	0.3
Эффективность регистрации $\varepsilon_{ee}(\theta)$	0.3
Статистика моделирования	0.2
Вычисление сечения	0.4
Относительная светимость	0.1
Квадратичная сумма	1.0

Суммарные «пучковые» погрешности 0.4%

# Систематические погрешности (МС)

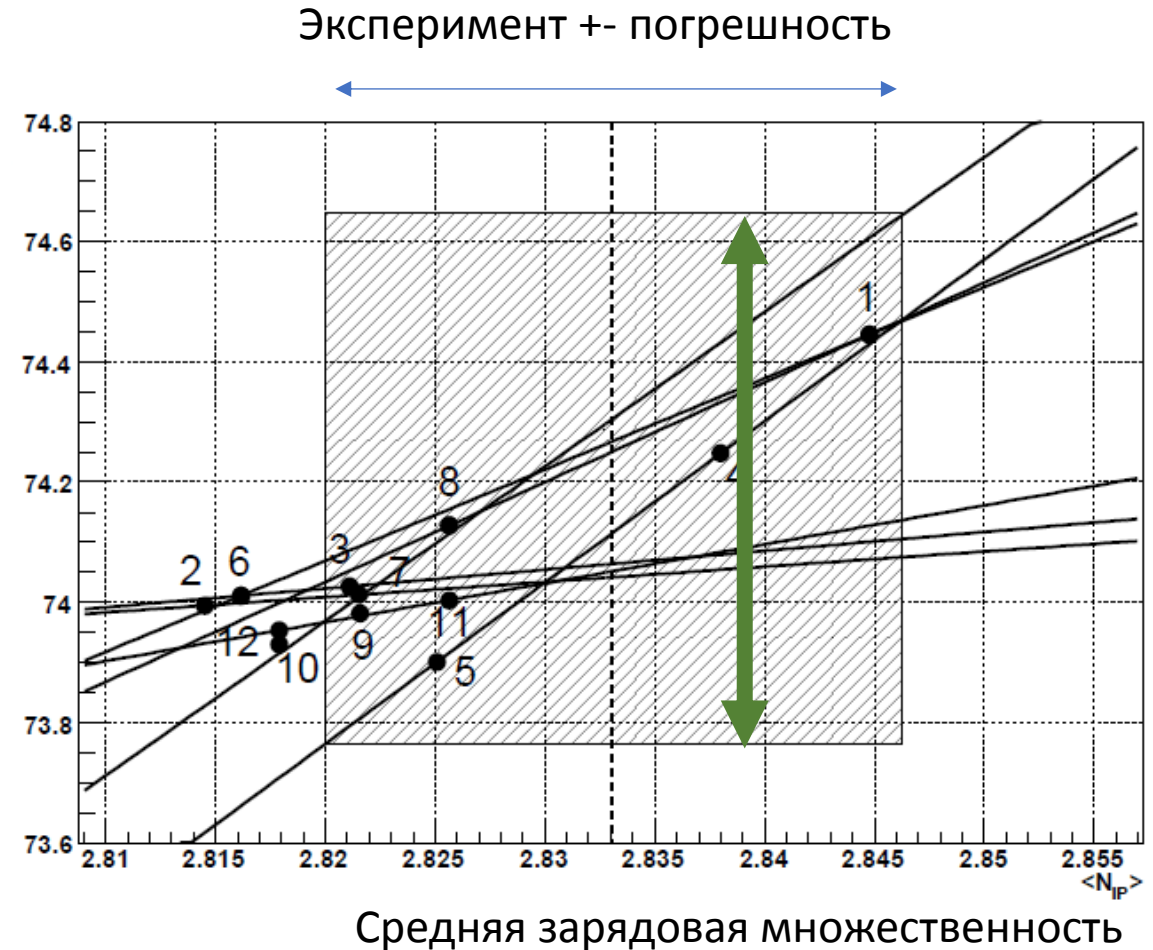
## Схема математического моделирования

1. генерация исходного процесса, например,  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ ;
2. излучение жестких глюонов по теории возмущений;
3. фрагментация партонов в адроны;
4. распад нестабильных частиц.

Точки - 12 различных вариантов моделирования (параметры генератора)

Линии - варьирование параметров

Пересечение с эксп.  $\rightarrow$  погрешность



# Систематические погрешности (МС)

Источник погрешности	Неопределённость, %
Настройка генератора распадов	0.6
Отбор событий для настройки генератора	0.3
Статистическая ошибка моделирования	0.3
Эффективность реконструкции треков	0.1
Табличные вероятности распадов	0.1
Квадратичная сумма	0.7

# Систематика (детекторная эффективность)

Источник погрешности	Неопределённость, %	
Триггерная эффективность	0.5	91.45 ± 0.05 %.
Подавление фона космических событий	0.3	
Ядерное взаимодействие	0.2	
Трековые $P_{\perp}/\theta$ разрешения	0.2	
Вариация условий отбора	0.5	
Квадратичная сумма	0.8	

**Триггер:** первичный 100 МэВ в торцевых CsI (3500 Гц)

Вторичный - два трека в вершинном детекторе или 1 трек+70МэВ в LKr

# Полученные результаты

$$\Gamma(J/\psi) = 92.45 \pm 1.40 \pm 1.48 \text{ кэВ},$$

$$\Gamma_{\text{адр}}(J/\psi) = 81.37 \pm 1.36 \pm 1.30 \text{ кэВ},$$

$$\Gamma_{ee}(J/\psi) = 5.550 \pm 0.056 \pm 0.089 \text{ кэВ},$$

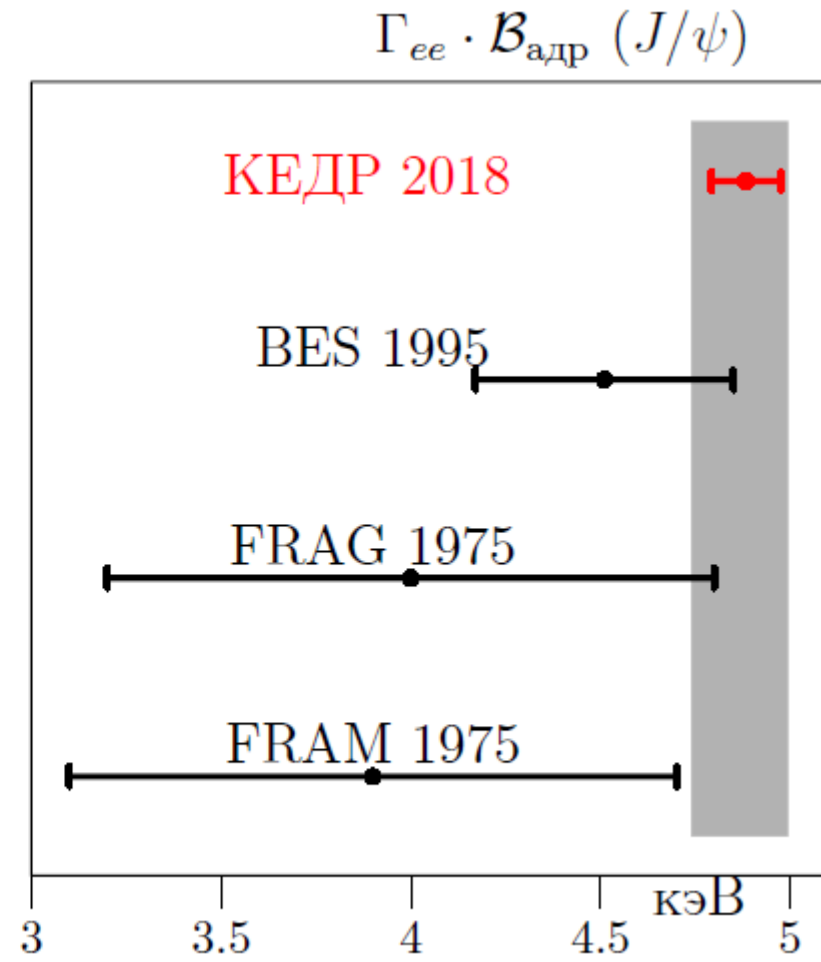
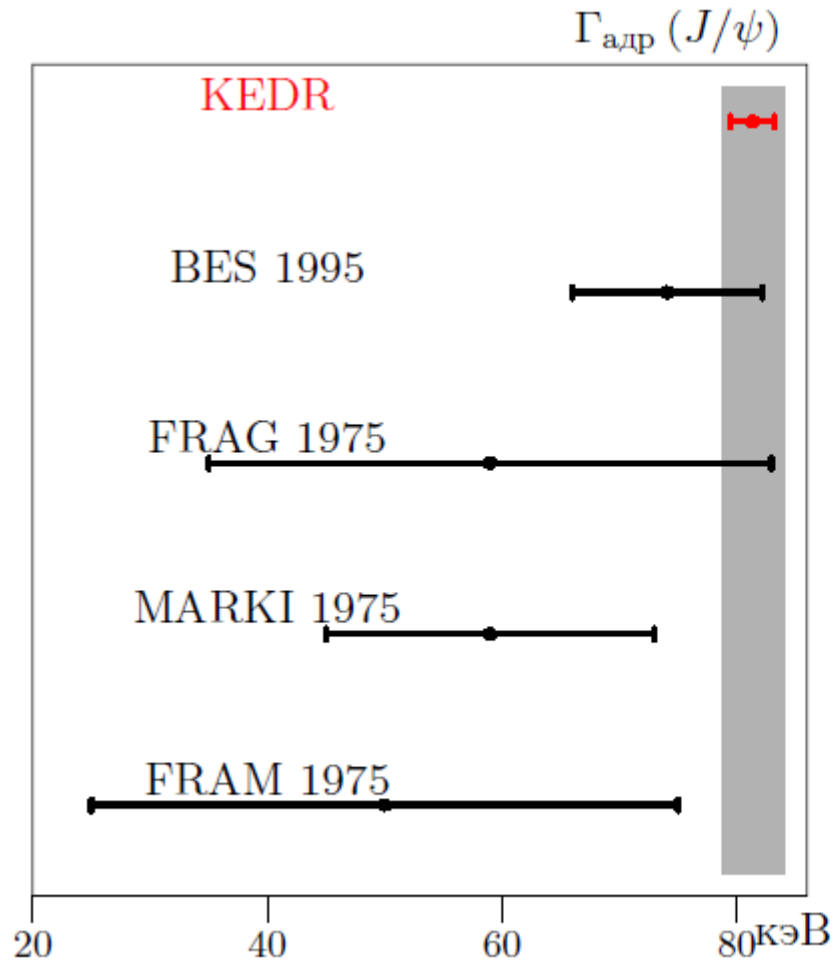
$$\Gamma_{ee}(J/\psi) \cdot \mathcal{B}_{\text{адр}}(J/\psi) = 4.884 \pm 0.048 \pm 0.078 \text{ кэВ},$$

$$\Gamma_{ee}(J/\psi) \cdot \mathcal{B}_{ee}(J/\psi) = 0.3331 \pm 0.0066 \pm 0.0040 \text{ кэВ}.$$

**Note: Сильная корреляция!**

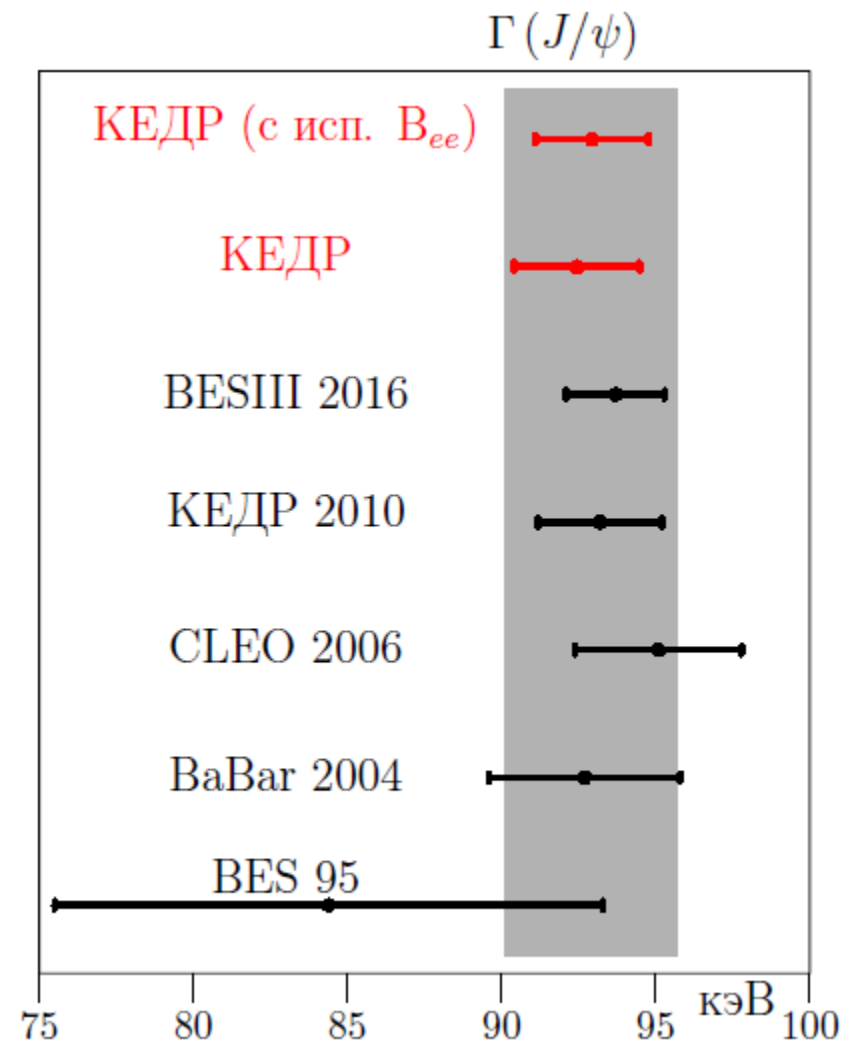
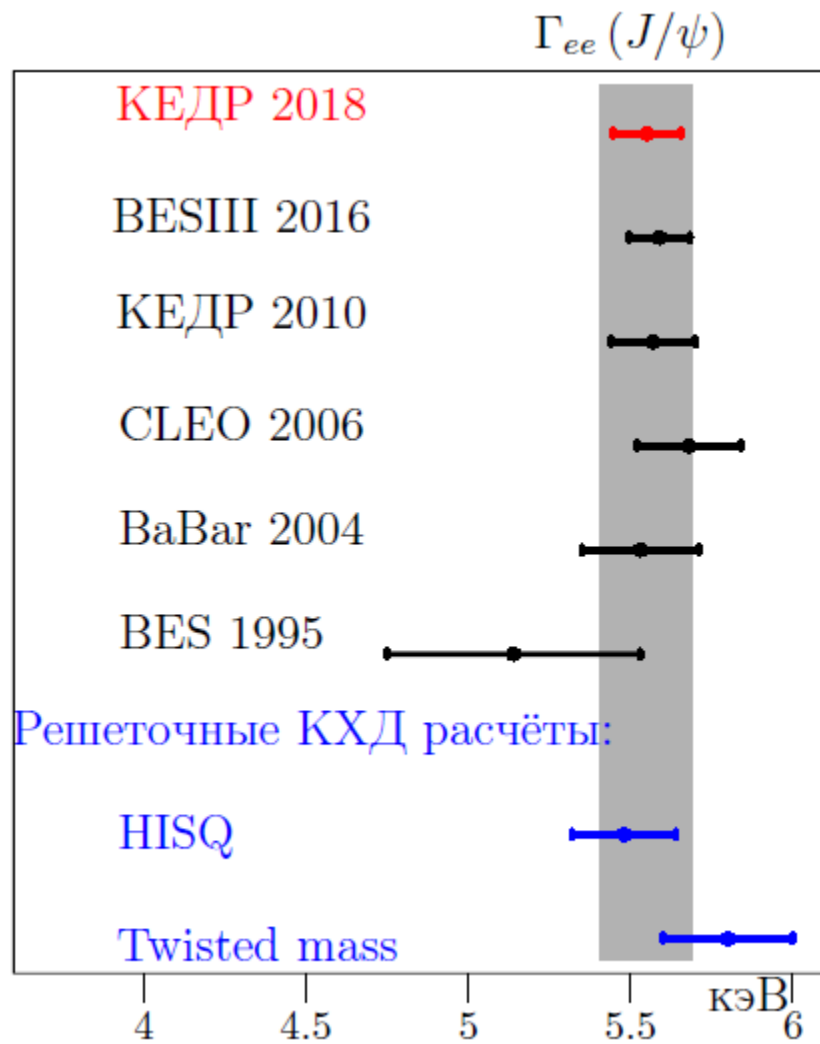
Источник	Неопределённость, %	
	$\Gamma, \Gamma_{\text{адр}},$ $\Gamma_{ee}, \Gamma_{ee} \cdot \mathcal{B}_{\text{адр}}$	$\Gamma_{ee} \cdot \mathcal{B}_{ee}$
Светимость	1.0	1.0
Моделирование распадов $J/\psi$	0.7	–
Отклик детектора	0.8	0.4
Ускорительные эффекты	0.4	0.4
Теоретические неопределённости	0.4	0.2
Квадратичная сумма	1.6	1.2

# Результаты (адроны, рекордная точность)





# Результаты ( $e\bar{e}$ , ТОЧНОСТЬ СОПОСТАВИМА С МИРОВОЙ)



# Основные результаты полученные в диссертации

- Прямым способом измерены полная, адронная и электронная ширины  $J/\psi$ -мезона:

$$\Gamma(J/\psi) = 92.45 \pm 1.40 \pm 1.48 \text{ кэВ},$$

$$\Gamma_{\text{адр}}(J/\psi) = 81.37 \pm 1.36 \pm 1.30 \text{ кэВ},$$

$$\Gamma_{ee}(J/\psi) = 5.550 \pm 0.056 \pm 0.089 \text{ кэВ},$$

- С помощью отношения лептонных ширин  $J/\psi$ -мезона  $\Gamma_{e^+e^-}/\Gamma_{\mu^+\mu^-}(J/\psi)$  вычислена мюонная ширина:

$$\Gamma_{\mu\mu}(J/\psi) = 5.538 \pm 0.111 \text{ кэВ}.$$

- Проведено наиболее актуальное измерение произведения электронной ширины на вероятность распада в адроны для  $J/\psi$ -мезона:

$$\Gamma_{ee}(J/\psi) \cdot \mathcal{B}_{\text{адр}}(J/\psi) = 4.884 \pm 0.048 \pm 0.078 \text{ кэВ}.$$

# Основные результаты полученные в диссертации

– Разработано программное обеспечение для калибровки ионизационных потерь  $dE/dx$  в дрейфовой камере детектора КЕДР, проводимой с помощью космических мюонов, а также для идентификации заряженных частиц по ионизационным потерям. Достигнутое разрешение составило 9.5 % для минимально ионизирующих частиц при нормальном падении, что лучше проектного разрешения 10.3 %.



**Проделана огромная работа**

**Однако, разработанный метод идентификации частиц по ионизационным потерям не использовался для получения полной и парциальной ширины  $J/\psi$ .**

# Запасные слайды

# Потенциальные модели чармония

E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, *et al.* Charmonium: Comparison with experiment. *Phys. Rev. D* **21** (1980) p. 203–233.

W. Buchmuller, S.-H. H. Tye. Quarkonia and quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D* **24** (1981) p. 132–156.

L. P. Fulcher. Perturbative QCD, a universal QCD scale, long-range spin-orbit potential, and the properties of heavy quarkonia. *Phys. Rev. D* **44** (1991) p. 2079–2084.

S. N. Gupta, W. W. Repko, C. J. Suchyta. Nonsingular potential model for heavy quarkonia. *Phys. Rev. D* **39** (1989) p. 974–977.

S. N. Gupta, J. M. Johnson, W. W. Repko, C. J. Suchyta. Heavy quarkonium potential model and the  $1P_1$  state of charmonium. *Phys. Rev. D* **49** (1994) p. 1551–1555.

E. J. Eichten, C. Quigg. Mesons with beauty and charm: Spectroscopy. *Phys. Rev. D* **49** (1994) p. 5845–5856.

D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin. Hyperfine Splitting and Leptonic Decay Rates in Heavy Quarkonia. *Modern Physics Letters A* **18** (2003) 23, p. 1597–1600.

P. Gonzalez, A. Valcarce, H. Garcilazo, J. Vijande. Heavy meson description with a screened potential. *Phys. Rev. D* **68** (2003) p. 034007.

S. F. Radford, W. W. Repko. Potential model calculations and predictions for heavy quarkonium. *Phys. Rev. D* **75** (2007) p. 074031.

A. M. Badalian, I. V. Danilkin. Di-electron and two-photon widths in charmonium. *Physics of Atomic Nuclei* **72** (2009) 7, p. 1206–1213.

L. Cao, Y.-C. Yang, H. Chen. Charmonium States in QCD-Inspired Quark Potential Model Using Gaussian Expansion Method. *Few-Body Systems* **53** (2012) 3, p. 327–342.

M. Shah, A. Parmar, P. C. Vinodkumar. Leptonic and digamma decay properties of S-wave quarkonia states. *Phys. Rev. D* **86** (2012) p. 034015.

S. Patel, P. C. Vinodkumar, S. Bhatnagar. Decay rates of charmonia within a quark-antiquark confining potential. *Chinese Physics C* **40** (2016) 5, p. 053102.

# Вычисление КХД на решетке

G. C. Donald *et al.* (HPQCD Collaboration). Precision tests of the  $J/\psi$  from full lattice QCD: Mass, leptonic width, and radiative decay rate to  $\eta_c$ . Phys. Rev. D **86** (2012) 094501.

G. Bali, S. Collins, D. Mohler, *et al.* Charmonium resonances on the lattice. EPJ Web Conf. 175 (2018) p. 05020.

G. Bailas, B. Blossier, V. Morenas. Some hadronic parameters of charmonia in  $N_f = 2$  lattice QCD. Eur. Phys. J. C **78** (2018) 1018.

D. Becirevic, F. Sanfilippo. Lattice QCD study of the radiative decays  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  and  $h_c \rightarrow \eta_c \gamma$ . J. High Energ. Phys. **01** (2013) 28.